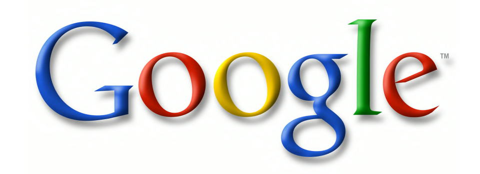
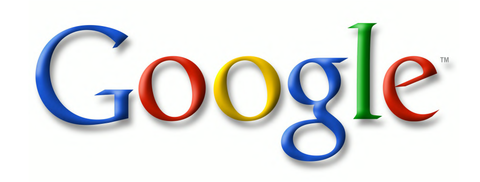






INFINI ET QUANTITÉ

COULOMMIERS. — TYPOGRAPHIE PAUL BRODARD.

INFINI

ET QUANTITÉ

ÉTUDE SUR LE CONCEPT DE L'INFINI EN PHILOSOPHIE
ET DANS LES SCIENCES

PAR

F. EVELLIN

Ancien élève de l'Ecole normale supérieure
Agrégé de philosophie
Professeur de philosophie au lycée Saint-Louis

PARIS
LIBRAIRIE GERMER BAILLIÈRE ET Cie
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 108
AU COIN DE LA RUE HAUTEFEUILLE

1880

INFINI ET QUANTITÉ

PREMIÈRE PARTIE

PROLÉGOMÈNES

CHAPITRE PREMIER

ESQUISSE D'UNE HISTOIRE DE L'INFINI

Deux sens attachés au concept de l'infini, celui d'indétermination, celui de perfection ou d'achèvement. — La plupart des philosophes anciens et modernes adoptent le premier sens. — Les Cartésiens adoptent le second. — Kant les oppose l'un à l'autre. — État du problème au moment où on l'aborde.

Des concepts auxquels s'est de tout temps attachée la spéculation philosophique, aucun ne semble d'abord plus obscur que celui de l'infini, aucun n'a donné lieu à des analyses plus variées et à des vues plus diverses. Mais, si les systèmes qui lui doivent leur origine sont nombreux, les nuances qui les séparent, vues d'une certaine hauteur, tendent à disparaître, et les différences qui subsistent, sont, on peut le croire, bien moins dans les solutions que dans les énoncés. Un même terme est presque toujours susceptible d'interprétations différentes, et rien de plus naturel lorsqu'il s'agit de ces notions fuyantes et subtiles que revendiquent à titres presque égaux l'imagination et la raison pure. L'histoire prouve cependant, que, tout malentendu écarté, les théories que l'idée de l'infini a suscitées d'âge en âge, peuvent se ramener à deux principales, qui ne diffèrent entre elles que par le point de départ qu'on choisit et l'instrument qu'on emploie.

La plupart des philosophes de l'antiquité firent du concept de l'infini un concept négatif. L'être, à leurs yeux, n'est véritablement digne de ce nom que s'il possède une forme arrêtée et des contours définis. Les limites qui le circonscrivent sont autant de déterminations qui le fixent, et condensent, en quelque sorte, son existence éparse. Telle fut déjà sans doute l'opinion des premiers sages d'Ionie. Ils estimaient que ce qui est sans borne doit être aussi sans essence, et le terme ἄπειρον dont ils se servaient pour désigner l'infini veut dire, au propre, sans limites, au figuré, sans propriétés susceptibles de constituer une notion. Si le monde existe, c'est grâce au mouvement, qui agrège ce qui était dispersé et distingue ce qui était confondu.

La même pensée pénètre et anime toute la philosophie pythagoricienne. Le nombre, dans cette doctrine, est véritablement créateur; c'est qu'il divise, c'est qu'il sépare; c'est qu'il dessine, au sein de l'infini primitif, des formes intelligibles et des figures mesurables. Platon adopte avec quelques amendements le dualisme de Pythagore. Le nombre devient l'idée, principe plus logique que mathématique; mais l'infini, sous le nom de matière (ἡ ὕλη) reste absolument ce qu'il était dans les théories précédentes. C'est le principe de l'indétermination, le mélange confus des contraires, chaos aveugle, aussi infécond pour l'être qu'impénétrable à la pensée. Rien n'existe que ce qui est intelligible, et rien n'est intelligible que ce qui est déterminé, c'est-à-dire, d'une nature absolument opposée à celle de la matière ou de l'infini.

Ce n'est pas que l'infini soit le néant pur. On peut, d'après l'auteur du *Philèbe* [1], diviser les êtres en deux genres : l'infini, qui comprend tout ce qui est sujet du plus ou du

1. Voir Platon (Tauchnitz), *Philèbe*, ch. XII :
Ὁπόσ' ἄν ἡμῖν φαίνηται μᾶλλόν τε καὶ ἧττον γιγνόμενα, καὶ τὸ σφόδρα καὶ ἠρέμα δεχόμενα, καὶ τὸ λίαν, καὶ ὅσα τοιαῦτα, πάντα εἰς τὸ τοῦ ἀπείρου γένος, ὡς εἰς ἕν, δεῖ πάντα ταῦτα τιθέναι. . . . .
Οὐκοῦν τὰ μὴ δεχόμενα ταῦτα, τούτων δὲ τὰ ἐναντία πάντα δεχόμενα, πρῶτον μὲν τὸ ἴσον καὶ ἰσότητα, μετὰ δὲ τὸ ἴσον, τὸ διπλάσιον, καὶ πᾶν ὅ τι περ ἄν πρὸς ἀριθμὸν ἀριθμὸς, ἤ μέτρον πρὸς μέτρον, ταῦτα ξύμπαντα εἰς τὸ πέρας ἀπολογιζόμενοι, καλῶς ἄν δοκοῖμεν δρᾷν τοῦτο, ἤ πῶς σὺ φῄς;

moins, froid ou chaud, grand ou petit ; et le fini, qui répond à l'égalité, au nombre, à la mesure, à la détermination enfin, sous quelque forme que ce soit. L'existence réelle est le mélange du fini et de l'infini, parce que, en lui donnant l'ordre, la mesure et la loi, le fini fait passer l'infini à l'existence.

L'infini est donc un principe véritable, principe passif sans doute, mais indispensable à l'être. C'est la réalité en voie d'enfantement, le devenir incertain et flottant encore entre des fins diverses, opposées peut-être, mais telles que l'une, un jour, laissera sur lui sa trace sous forme de détermination concrète. Le nom qui lui conviendrait le mieux est celui de virtualité ou de puissance. Telle est la formule vers laquelle nous nous acheminons peu à peu en commentant la pensée de Platon, et qu'adopte, sans jamais la perdre de vue, le génie si exact et si précis d'Aristote. Qu'on veuille bien se rappeler les définitions les plus importantes de la *Physique*, et l'on se convaincra que le philosophe obéit toujours à cette conception dirigeante. Le domaine du fini c'est le réel, celui de l'infini, le possible. S'agit-il du monde que nous habitons, de l'univers réel au centre duquel il nous semble que nous sommes placés, Aristote y compte, après Platon, après Eudoxe de Cnide, un certain nombre de cercles ou de cieux solides. S'agit-il, au contraire, de ces quantités abstraites que l'esprit peut, à son gré, faire croître ou décroître, il ouvre devant elles ou plutôt devant la pensée qui les crée en les concevant, le champ illimité de l'infini.

Sur ce point les textes ne laissent aucun doute :

« Il est clair que l'infini ne peut avoir d'existence actuelle. Il n'est ni une substance ni un principe concret [1]. »

« Si c'était une substance, elle serait divisible ou indivisible. — Indivisible. — Comment l'imaginer, puisque l'infini ne qualifie que la quantité [2] ? — Divisible. — Elle se compo-

1. Φανερὸν δὲ καὶ ὅτι οὐκ ἐνδέχεται εἶναι τὸ ἄπειρον, ὡς ἐνεργείᾳ ὄν, καὶ ὡς οὐσίαν, καὶ ὡς ἀρχήν. (*Phys.*, liv. III, ch. v.)

2. Ἀμέριστον ἄρα καὶ ἀδιαίρετον. — Ἀλλ' ἀδύνατον τὸ ἐντελεχείᾳ ὄν ἄπειρον· πόσον γάρ τι εἶναι ἀναγκαῖον. (*Phys.*, *ibid.*)

serait de parties infinies elles-mêmes, sous peine d'enfermer une contradiction dans son essence; or plusieurs infinis ne sont pas le même infini, et l'hypothèse est inadmissible [1]. »

On remarquera que cette argumentation, si ferme à la fois et si concise, se fonde sur l'impossibilité où nous sommes de constituer un tout infini à l'aide d'un nombre donné d'éléments actuels, s'il est fini. La science contemporaine est plus explicite, mais le principe qu'elle invoque n'a pas varié.

« Cependant, ajoute l'auteur de la *Physique*, on arrive à bien des conséquences absurdes, si l'infini n'est absolument pas. — Le temps aura un commencement et une fin. — Les grandeurs ne seront plus divisibles en grandeurs. — Le nombre ne sera plus infini. — L'idée que nous nous faisons de ces choses nous contraint d'écarter de telles conclusions. Il nous faut donc un arbitre; car il est clair qu'en un sens l'infini est, et qu'en un autre il n'est pas. Or on dit d'une chose tantôt qu'elle est en puissance, tantôt qu'elle est en acte : comme donc nous avons prouvé qu'une grandeur actuelle ne saurait être infinie, une seule conclusion reste possible : c'est que l'infini soit seulement en puissance [2]. »

Le stoïcisme abandonne ces hautes spéculations; mais dans les limites où il s'enferme, il n'est pas impossible de saisir sa pensée intime sur l'infini. Des deux principes constitutifs de la nature, l'un est le principe de détermination et d'essence, τὸ ποιόν; l'autre, substance ou matière, τὸ ὑποκείμενον, est un sujet indéterminé par lui-même, vague support de l'existence qui se confond, à n'en pas douter, avec le principe passif auquel les philosophes antérieurs avaient donné le nom d'infini. Si l'être n'est rien sans les modes qui l'expriment, le

1. Ἔσται ὁτιοῦν αὐτοῦ ἄπειρον τὸ λαμβανόμενον, εἰ μεριστόν..... Πολλὰ δ'ἄπειρα τὸ αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον. (*Phys.*, *ibid.*)

2. Εἰ δὲ μὴ ἐστὶν ἄπειρον ἁπλῶς, πολλὰ ἀδύνατα συμϐαίνειν δῆλον. τοῦ τε γὰρ χρόνου ἔσται τις ἀρχὴ καὶ τελευτὴ, καὶ τὰ μεγέθη οὐ διαιρετὰ εἰς μεγέθη, καὶ ἀριθμὸς οὐκ ἔσται ἄπειρος. — Ὅταν δὲ διορισμένων οὕτως μηδετέρως φαίνηται ἐνδέχεσθαι, διαιτητοῦ δεῖ, καὶ δῆλον ὅτι πῶς μὲν ἔστι, πῶς δ'οὔ. Λέγεται δὴ τὸ εἶναι, τὸ μὲν δυνάμει, τὸ δὲ ἐντελεχείᾳ..... τὸ δὲ μέγεθος, ὅτι μὲν κατ ἐνέργειαν οὐκ ἔστιν ἄπειρον, εἴρηται..... Λείπεται οὖν δυνάμει εἶναι τὸ ἄπειρον. (*Phys.*, liv. III, ch. VI.)

substratum des stoïciens n'est plus que la possibilité logique des contraires : ἡ ὕλη, τὸ ἄπειρον.

En résumé, pour les plus illustres représentants de la philosophie grecque, l'infini n'est que l'indéfini, et l'indéfini que l'indéterminé [1].

Le père de la philosophie moderne rejeta avec éclat l'opinion traditionnelle. Il n'en avait, il est vrai, qu'une connaissance imparfaite, et comme il la tenait en médiocre estime, il était systématiquement porté à l'exclure. Aristote avait dit : « Ce qui est parfait est achevé, et ce qui est achevé a des limites. » Τέλειον οὐθέν μὴ ἔχον τέλος, τὸ δὲ τέλος, πέρας. Descartes se place résolument à un point de vue opposé, et déclare que seul l'Être infini est parfait. *Deus, ens infinitum.* Pour la première fois, peut-être, dans l'histoire, l'infini qualifiait la réalité suprême [2].

Lorsqu'on le presse de dévoiler sa pensée intime, Descartes distingue quelquefois un infini que nous pourrions nommer intensif : c'est Dieu, et un autre infini qui ne serait qu'extensif : c'est le monde ; mais presque jamais cette distinction n'apparaît bien nette, ni chez le maître, ni chez les disciples, et, dans l'*Éthique*, les deux points de vue tendent à se confondre absolument [3].

1. Aristote signale quelques opinions en apparence discordantes. Les atomistes, entre autres Démocrite, affirment que les éléments sont en nombre infini. Ἄπειρα ποιοῦσι τὰ στοιχεῖα. (*Phys.*, liv. III, ch. IV.) Il est possible que ces philosophes veuillent désigner par là un nombre immense, un nombre qui échappe à tout calcul. On peut encore admettre que, fidèle au sens généralement adopté, Démocrite affirme que les atomes, pris à part, ne jouissent d'aucune propriété spéciale, les corps ne différant entre eux que par la nombre et la disposition des parties qui les constituent. C'est du moins l'opinion d'Aristote. Αὐτὸ τὸ κοινόν σῶμα ἁπάντων ἐστὶν ἀρχή, μεγέθει κατὰ μόρια καὶ σχήματι διαφέρον. (*Phys.*, liv. III, ch. IV.)
Anaxagore, qu'Aristote rapproche de Démocrite, devait être pour les mêmes raisons conduit aux mêmes conséquences. Si tout vient de tout, les éléments sont semblables, et il est dès lors impossible d'y découvrir aucune trace, aucun principe de différence ou de détermination.

Aristote cite encore Mélissus, qui croit que l'univers est infini ; mais il lui oppose l'opinion de Parménide.

2. Plotin donne, il est vrai, à l'unité suprême le nom d'infini, ἄπειρον, mais cette unité est l'indétermination même.

3. Descartes dit (*Princ. phil.*, I, art. 26) : « Nous appellerons ces choses

Pascal insiste sur l'infinité de l'univers; il admet avec l'auteur des *Principes* que l'étendue est une chose en soi, qu'elle fait le fond même de la matière et constitue sa réalité propre. La matière subit donc la loi de l'étendue géométrique; elle est, en grandeur comme en petitesse, infinie. Et il s'agit bien ici d'une infinité rigoureuse. Ce n'est plus cette immensité sans borne apparente, que saluent en termes inspirés, après les premières découvertes de l'astronomie moderne, certains philosophes de la renaissance, les Nicolas de Cuse ou les Bruno. C'est un monde actuellement illimité que le néant sous le nom de vide n'enveloppe ni ne pénètre. La pensée plonge en vain dans cet abîme sans fond; en vain s'élève-t-elle à d'incomparables hauteurs; elle est toujours dépassée et confondue.

Bossuet et Fénelon n'osent, en leur qualité de théologiens, se prononcer sur l'infinité du monde; mais l'un et l'autre font de l'infini une idée positive, et mettent, en même temps que la borne, la négation dans le fini.

Même exception pour Malebranche. Préoccupé de concilier la pensée cartésienne avec le dogme, il laisse dans l'ombre l'étendue concrète et s'attache à l'étendue purement intelligible, qu'il place en Dieu et déclare infinie comme Dieu lui-même. Par cette définition, le philosophe oratorien cherchait sans doute à échapper au panthéisme que porte en germe la doctrine du maître. Le monde, tel qu'il le conçoit, n'est donc plus infini que sous la forme d'une virtualité illimitée, analogue, malgré de notables différences, à la matière première de Platon.

Au contraire, l'interprète le plus sincère et le plus rigoureux de Descartes fut Spinoza. Pour lui, la Pensée et l'Etendue, infinies au même titre, devinrent deux aspects de la

(les quantités) indéfinies plutôt qu'infinies, afin de réserver à Dieu seul le nom d'infini. » Mais c'est là une concession qu'il ne fait que bien rarement. « Il répugne à ma pensée, dit-il ailleurs, ou, ce qui est le même, il implique contradiction que le monde soit fini ou terminé. » (*Lettres,* t. X, p. 227.) Presque toujours, Descartes fait du monde un infini véritable, un infini actuel.

substance, conçue comme le centre d'une infinité d'infinis. A ce point de vue, comme à tant d'autres, la doctrine cartésienne trouvait dans l'œuvre du solitaire penseur de l'*Ethique* son expression définitive.

La période qui comprend Descartes et Spinoza marque le règne sans conteste de l'Infini actuel, de l'Infini déterminé et achevé, de l'Infini cause et substance, et c'est, à notre sens, une des erreurs les plus graves qui aient régné en philosophie. — Cependant une doctrine étroite mais sensée, l'Empirisme, rencontrant cette idée sur son chemin, y remarqua, non sans raison, une contradiction flagrante, refusa de l'inscrire au nombre des notions intelligibles et passa outre. Gassendi écrivait à Descartes : « Celui qui nomme une chose infinie donne un nom qu'il n'entend pas à une chose qu'il n'entend pas mieux [1]. » — Hobbes et Locke revinrent franchement à l'indéterminé des anciens. Le premier fit observer avec une extrême sagacité, sans toutefois l'établir suffisamment, « que le terme infini exprime seulement la faculté de notre esprit d'ajouter sans fin [2]. » Locke, dans une théorie plus détaillée et plus savante, montra que l'infini de quantité n'est possible que sous la forme du devenir : telles ces fractions périodiques, toujours susceptibles d'accroissement et toujours inachevées. Après Hobbes et Locke, Hume rejeta l'Infini actuel. Il n'admit comme rationnelle et vraisemblable l'existence de Dieu, qu'à la condition d'en faire un Etre personnel, et d'en exclure cette contradiction dans les termes, l'infinité.

Le retour à la tradition accidentellement rompue eut sur le rationalisme cartésien lui-même une influence décisive. Leibniz, aussi curieux des doctrines anciennes que Descartes y avait paru indifférent, émit sur l'infini des idées plus voisines qu'on ne le croit généralement de celles de Locke. Cette notion contestée, parce qu'elle était trop vague, fut ramenée par lui à deux notions très distinctes : — dans le nombre, l'indéfini ; — au-dessus du nombre, l'absolu. — L'absolu, c'est

1. *Obj. cinq.*, III, 8, *et rép.*
2. *De corpore*, ch. VII.

l'achevé au sens d'Aristote, τὸ τέλειον; c'est Dieu, dans son unité parfaite, affranchi de la loi de quantité. L'absolu occupe donc le sommet de l'être. Au pôle opposé se montre l'indéfini, attribut caractéristique de la grandeur abstraite et du nombre. Il n'a de raison d'être que dans le domaine du possible, domaine de beaucoup inférieur à celui de l'existence, même imparfaite, et il résulte d'un principe de similitude inhérent à l'intelligence, principe en vertu duquel une quantité purement idéale peut toujours s'ajouter à elle-même ou se subdiviser sans fin.

Il est vrai que, parfois, Leibniz semble vouloir restaurer la notion de l'Infini proprement dit dans le monde réel et concret. Mais, sur ce point, il nous fournit lui-même des explications. L'Univers, d'après lui, n'est point composé d'un nombre strictement infini d'unités de force ou de monades, ce qui serait contradictoire; il enferme plutôt une multitude de parties supérieure à tout calcul, supérieure au nombre lui-même, seule digne de la puissance divine qui est absolue. Le meilleur des mondes possibles est ainsi soustrait à la loi de quantité, et placé à égale distance du règne de la perfection et de celui des possibilités mathématiques. Telle est du moins l'opinion qu'expose, non sans quelque embarras, le philosophe, lorsque, pressé d'objections, il se croit tenu de nous faire connaître sur ce point le fond de sa pensée [1].

A l'époque où parut Kant, le problème semblait mûr pour une solution. On pouvait chercher à le dégager des équivoques et des malentendus qui l'encombraient encore, retrouver, dans l'histoire de l'idée qu'il s'agissait de définir, les deux conceptions fondamentales qu'on s'en était faites, et opter finalement entre la théorie cartésienne et celle de presque

1. En dehors de la continuité mathématique et lorsqu'il s'agit du monde réel, voici comment s'exprime Leibniz : « Je pense, à proprement parler, que l'infini formé de parties n'est ni une unité ni un tout. » (*Lettres*. Des Bosses. Dut., 272.) Et ailleurs : « J'accorde une multitude infinie, mais cette multitude ne fait pas un nombre ou un tout. Elle signifie seulement qu'il existe plus de termes qu'on n'en peut désigner. » (Lettre à Jean Bernouilli.) Leibnitii et J. Bernouilli commercium philosophicum et mathematicum. Lausannæ et Genevæ 1745, t. I, p. 440.

tous les autres penseurs. Kant suivit une voie tout opposée. Il refusa de pénétrer dans le labyrinthe où son génie eût certainement trouvé le fil conducteur ; il fit du problème de l'Infini la citadelle du scepticisme, et, pour atteindre plus sûrement la Raison pure, il chercha à établir que cette notion, son unique raison d'être et son objet propre, n'est rien qu'un décevant mirage, tour à tour, et selon les impressions mobiles de l'âme, réalité et néant. — L'infiniment grand est et n'est pas. — L'infiniment petit est et n'est pas. — Inconciliables antinomies! A ces hauteurs, l'entendement s'égare, la pensée se retourne contre elle-même; la logique du métaphysicien, prise de vertige, édifie ou détruit à son gré. C'est du moins ce qu'entend nous persuader l'auteur de la *Critique*, mais la raison humaine n'abdique pas, et la philosophie ne fait halte que pour prendre haleine. En opposant l'une à l'autre les deux théories que nous avons vues successivement régner dans l'histoire, Kant, à notre avis, n'a fait qu'une chose : mettre la Métaphysique en demeure, et préparer le terrain pour une Apologie de la Raison pure.

Depuis l'apparition de la *Critique*, on a plus d'une fois contesté la portée des antinomies. Hegel comprit d'une façon générale que tous ces contrastes devaient se fondre dans l'unité supérieure d'une synthèse rationnelle ; toutefois, après de si vives attaques, l'*a-priori* pur ne pouvait que susciter d'extrêmes défiances. Hamilton affirme que, dans son opinion, la science humaine ne peut s'élever au-dessus du fini. Il faut donc que la foi vienne au secours de la raison défaillante [1]. Mill hésite. Il inclinerait vers l'infini de grandeur,

1. « Nous pensons qu'en dehors du particulier nous ne pouvons jamais, dans nos plus hautes généralisations, nous élever au-dessus du fini; que notre science, soit de l'esprit, soit de la matière, ne peut être que la connaissance des manifestations relatives à une existence incompréhensible. » (*Fragm. de phil.,* trad. Peisse, p. 18 et 19.)

« Nous croyons, dit encore Hamilton, au dogme théologique de l'infini. C'est pour nous une nécessité et un devoir d'y croire. » (Voir Stuart Mill, *Philosophie de Hamilton,* trad. Cazelles, p. 70.)

La véritable question, ainsi que le fait judicieusement remarquer M. Renouvier, est toujours de savoir si l'univers, *tel que nous le concevons*, est ou non composé de grandeurs multipliées ou divisées sans fin.

bien qu'il admette que dans un autre état d'existence nous puissions trouver des bornes à l'espace. Tout pesé, sa pensée reste suspendue et comme en équilibre, sans incliner ni à droite ni à gauche; et le penseur qui ne songeait d'abord qu'à combattre la philosophie toute critique et toute négative de Hamilton, en vient, faute de mieux, à se demander si l'attribut de la grandeur ne serait pas exclusivement une propriété de nos sensations. C'était, après quelques velleités de solution purement rationnelle, retomber dans le mysticisme métaphysique de Kant.

Nous ne voulons tracer qu'une rapide esquisse; il faut donc négliger les détails. De nos jours, M. Herbert Spencer, cet esprit d'une originalité si puissante, ne fait guère, sur le terrain où nous nous sommes placés, que suivre les traces de Kant et de Hamilton ; nous ne le citons donc que pour mémoire ; mais il serait injuste de ne pas appeler l'attention sur le mouvement d'idées que nous voyons actuellement se produire, et de ne pas faire observer que, grâce à de récents et remarquables travaux, les éléments sont sous la main, tout près à se coordonner comme d'eux-mêmes en vue d'une théorie plus large et plus complète de l'Infini. Dans l'ouvrage qu'il vient de publier sous le titre de *Temps et Espace*, M. Shadworth Hodgson cherche à prouver que les propositions contradictoires que le criticisme oppose les unes aux autres sous forme d'antinomies, ne sont nullement affirmées du même et sous le même point de vue. Le principe de contradiction serait donc sauf, et avec lui la raison dont il constitue l'essence. Ainsi les idées dogmatiques que tant d'assauts répétés avaient mises en déroute, s'arrêtent dans leur fuite et se rallient. Le criticisme nouveau semble loin d'y mettre obstacle. L'esprit vigoureux et pénétrant qui a pris à tâche de renouveler en France la philosophie de Kant, M. Renouvier, va demander à la distinction savamment faite du possible et de l'actuel la solution du problème qui nous occupe. Nous suivrons la voie qu'il nous ouvre, satisfaits, pour notre part, de tirer d'un principe aussi fécond toutes les conséquences qu'il renferme.

Résumons-nous en quelques mots. Avant la *Critique*, deux théories opposées se trouvent en présence : Kant les met aux prises, mais le choc des antinomies, loin de les détruire l'une par l'autre, révèle l'infériorité de l'une d'elles, et tout, aujourd'hui, si nous ne sommes dupes de nos espérances, semble promettre une solution.

CHAPITRE II

L'IMAGINATION ET LA RAISON EN FACE DU PROBLÈME DE L'INFINI

Leurs solutions sont non seulement différentes, mais opposées. — L'imagination tient pour l'infini de petitesse et de grandeur. -- La raison proteste au nom du principe de contradiction qui lui est essentiel. — Cette opposition fondamentale explique les deux mouvements d'idées que signale l'histoire.

Supériorité de la méthode rationnelle. — Nécessité d'écarter les prétendus critères du sens commun et de la négative inconcevable.

On ne saurait trop se tenir en garde, lorsqu'on aborde le problème de l'Infini, contre les préjugés que crée et entretient fatalement l'imagination. C'est dans les spéculations de cet ordre, qu'elle mérite le mieux son nom de « maîtresse d'erreur. »

L'Imagination a un domaine propre, circonscrit, strictement fermé. Son objet est le sensible et l'individuel. L'objet véritable de l'entendement et par conséquent de la science, est l'intelligible, le général. Comme nous ne pouvons concevoir sans imaginer, à l'idée pure s'attache toujours, dans notre esprit, une image qui, bien qu'indispensable pour la mieux fixer, l'altère. Comment expliquer la présence de cette image, résidu du sensible, souvenir de la perception disparue, intermédiaire obligé entre l'objet et son concept rationnel ? On serait tenté de croire que chaque événement de la vie mentale, au moment où il apparaît, reproduit en abrégé son histoire, ou, si l'on veut, les phases successives du progrès qui

l'a amené au jour. Comme les individus, les faits ont leur passé, et ceux d'entre les faits qui sont conscients, doivent offrir au regard de l'âme une rapide esquisse des antécédents qui les ont rendus possibles et permettraient, si l'on ose dire, d'en faire l'embryologie. C'est ce qui a lieu en effet : l'objet sensible est la condition de l'image ; l'image, à son tour, devient la condition de l'idée. La nature, toujours semblable à elle-même dans ses lois essentielles, attache donc l'image à l'idée, comme un vivant trait d'union entre elle et la perception d'où elle est sortie, comme un symbole des degrés successifs de l'évolution qui a dû se produire avant que la pensée pût atteindre le général et s'assimiler les choses en concepts.

Mais il importe de ne pas prendre le change, et de se faire une idée exacte du rôle et de la portée de l'image dans la conception rationnelle. L'image soutient la pensée pure, comme un degré, le degré qui le suit; jamais elle ne lui est adéquate; c'est ce que n'ignore aucun savant. Le géomètre appuie ses spéculations idéales sur le sensible, mais il distingue soigneusement le concept auquel sa raison s'attache, des symboles grossiers qui le représentent aux yeux; le physicien lui-même cherche à déchiffrer sous les phénomènes l'idée qu'ils voilent; le naturaliste veut lire la pensée du genre dans l'individu qui ne la traduit qu'obscurément. Bref, la science n'a d'autre objet que les principes intelligibles et les lois générales. La vérité une fois obtenue, le savant écarte la perception ou l'image qui a permis de la concevoir, comme l'ingénieur, ces appuis provisoires, dont, l'œuvre finie, il peut se passer.

Remarquons toutefois que l'imagination ainsi définie est plus utile encore que nuisible au savant. Elle met à sa disposition des formes ou des symboles qui ne sont pas sans analogie avec l'idée conçue. Le triangle sensible tracé à la craie sur le tableau ou à l'encre sur le papier, est du moins une ébauche du triangle idéal. Le cercle dont on aperçoit extérieurement ou intérieurement le dessin, aide à penser, ne fût-ce que par approximation, au cercle idéal, au cercle pur.

De part et d'autre, composition, divisibilité, étendue. Il n'en est plus ainsi, quand il s'agit de ces problèmes supérieurs qui ont pour objet les premiers principes ou les éléments ultimes. Remonter du composé à ses parties constituantes, aller du multiple à l'un, c'est se condamner d'avance à rejeter jusqu'au symbole de l'étendue, au schème habituel de la composition, et peu d'hommes sont capables d'un pareil effort, car rien n'est plus malaisé que de secouer le joug d'habitudes invétérées et vraisemblablement héréditaires. Penser, pour l'immense majorité des hommes disséminés dans l'espace, et pour la presque totalité de ceux qui nous ont précédés dans le temps, est ou a été penser le sensible et l'étendu. Nous devons donc faire une véritable violence à des lois devenues presque fatales. Mais qu'importe? La question véritable se pose ainsi : oui ou non, est-il légitime de résister à des tendances qui peuvent ne paraître invincibles que parce qu'elles se sont fortifiées d'âge en âge, de rompre des associations qui peut-être ne semblent nécessaires que parce qu'elles se sont constamment produites? En d'autres termes, avons-nous le droit d'affirmer l'un, bien que le représenté soit multiple, le composant ultime et indivisible, bien que l'image reste étendue?

Ne préjugeons pour le moment aucune solution; aussi bien ne pourrions-nous le faire sans entrer dans le vif de la thèse; mais établissons fermement ce principe que, si la raison dont l'axiome de contradiction est le ressort véritable nous impose la loi de ramener le composé au simple, entre le composé sensible, indispensable en tout état de cause à l'imagination, et l'unité pure exigée par la raison, le choix du philosophe ne saurait être un moment douteux. Nous l'avons fait observer déjà, l'image, bien qu'à certains égards analogue à l'idée, détruit ou tend à détruire partiellement le concept qu'elle exprime. Ainsi, au premier degré de l'évolution intellectuelle, à ces hauteurs moyennes qu'habite la science, le général est figuré dans l'esprit par le particulier, qui, comme tel, en est l'absolue négation. Toutefois le savant

ne saurait hésiter, et, de fait, il n'hésite jamais entre le particulier qu'il nie et le général qu'il affirme. La proposition, par exemple, d'après laquelle « un prisme triangulaire est triple de toute pyramide de même base et de même hauteur », est généralement vraie, et dépasse le symbole sensible qu'on imagine, de toute la distance qui sépare l'abstrait du réel, l'intelligible du sensible, l'indéfini du fini. Au degré supérieur du progrès de la pensée, à la hauteur de ces généralités qui enveloppent, outre les faits, les lois elles-mêmes, le même phénomène se reproduit plus frappant encore. Les premiers principes, dans l'ordre de la génération de l'être, les derniers éléments, au point de vue de la division des réalités concrètes, sont et doivent être autant d'unités absolues. L'imagination sera donc aussi rebelle à la représentation de ces unités en métaphysique, qu'à celle de l'idée générale dans la science. Le philosophe devra-t-il plus que le savant se préoccuper de cette contradiction? Nullement. La différence est-elle donc plus grande entre le composé et le simple, qu'entre le particulier et le général? De part et d'autre, la négation suit l'affirmation : l'opposition est absolue. Une réserve, néanmoins, est nécessaire. Entre la loi et le fait, opposés comme le général au particulier, il existe une harmonie, mieux encore, une étroite parenté, s'il est vrai que l'un ne puisse se passer de l'autre. Les mêmes relations unissent le composé au simple, et il n'est pas besoin de longues réflexions pour comprendre que, bien que ces deux termes aient un sens contraire, le premier implique le second.

Un des préjugés les plus répandus est celui qui nous porte à croire que tout composé est formé d'éléments qui lui ressemblent. Une des antinomies de Kant, la seconde, n'a d'autre fondement que cette hypothèse; un espace, d'après le célèbre critique, ne saurait être formé que d'espaces. Telle fut aussi l'opinion de Descartes et de Pascal; telle doit être l'opinion de tout esprit géométrique, porté à confondre le lieu en soi avec l'étendue purement abstraite. Mais revenons au préjugé commun. Nul principe n'est moins fondé en rai-

son : seule, l'association habituelle l'explique. La science, à ce point de vue comme à tant d'autres, corrige sans cesse, mais sans la détruire, l'erreur née de la connaissance sensible. Le chimiste, par exemple, nous apprend que les derniers éléments de l'eau ne sont pas de l'eau, et d'une façon générale que les propriétés des parties intégrantes dans une combinaison quelconque, loin de s'ajouter, disparaissent pour faire place à des propriétés nouvelles. — On nous fait observer, il est vrai, que, si différentes du tout que soient les parties, elles demeurent étendues et divisibles; ainsi l'hydrogène, l'oxygène, n'ont avec l'eau qu'un trait de ressemblance, mais il est essentiel : comme l'eau, ils occupent une portion de l'étendue, comme elle, ils se résolvent en parties, comme elle, ils sont susceptibles de manifester leur présence, et de laisser d'eux dans la pensée un schème ou une image. Ne sont-ce pas là les signes mêmes de la réalité? — De la réalité sensible, soit, non de la réalité absolue et véritable. La réalité sensible, celle du toucher et de la vue, est faite d'éléments et d'interstices, d'être et de néant. La réalité véritable se ramène aux seuls éléments qui la constituent, et ces éléments ne sauraient être étendus, s'ils sont réellement indivisibles et élémentaires. Que l'oxygène, que l'hydrogène occupent une certaine portion de l'espace, rien de plus naturel : composants de l'eau, ils sont eux-mêmes composés; il doit donc y avoir, au moins à ce point de vue, analogie entre le facteur et le produit ; mais l'élément ultime, l'élément métaphysique, s'il existe (et comment supposer qu'il n'existe pas?), est, par hypothèse, sans composition possible ; le principe de contradiction lui-même exige donc qu'il ne soit plus divisible, et par conséquent plus étendu. Lorsqu'entre les facteurs et le produit la dernière analogie disparaît, pourquoi vouloir que les propriétés conservent quelque chose de semblable? La raison, dans ce cas, bien loin de se contredire, maintient énergiquement son accord avec elle-même, sans se laisser troubler par l'image, issue des apparences sensibles et ouvrière d'erreur.

Pendant que l'imagination toujours orientée vers le sensible et l'étendu se refuse à concevoir l'élément métaphysique, elle nous emporte, contrairement aux exigences légitimes de la raison, vers l'infiniment grand, qu'elle affirme sans jamais parvenir à l'embrasser. Pour tout homme qui n'a pas l'habitude de spéculer sur ces matières, l'immense, c'est l'infini. Nos rêves, d'abord vaincus par la réalité, prennent une sorte de revanche sur la réalité même, et l'exagèrent sans fin. Ne pouvons-nous imaginer un nombre de sphères double, triple, décuple de celui que l'astronome constate? Le ressort de l'imagination, une fois forcé, ne revient plus sur lui-même. Nous n'avions osé rêver ce qui est; nous rêvons sans fin ni trêve ce qui n'est pas. Le sensible appelle le sensible; la représentation, la représentation. Au delà, toujours au delà! Rien de plus poétique que ces pages inspirées, où Pascal, étalant à nos yeux le spectacle d'un univers sans bornes, nous donne le vertige de l'infini. Nos conceptions s'enflent; la nature les dépasse; après avoir franchi en pensée espaces et mondes, nous croyons enfin entrevoir la limite, elle recule encore : la circonférence n'est nulle part. Illusion du génie qui fait le monde sur le modèle de sa pensée et que fascinent ses propres créations!

Les propositions que nous cherchons à établir excluent ces entraînements de la fantaisie qu'on ne confond que trop souvent avec le sens commun. Si le sens commun est le sens du vulgaire, il faut résolument le proscrire dans les spéculations scientifiques; sinon, qu'il donne ses titres, èt l'on verra qu'il ne peut utilement se réclamer que de la raison, dont il doit subir les exigences.

Le sens commun écarté, faut-il accepter comme critère le principe plus récent de l'inconcevabilité de la négative? Il est aisé de montrer que cette formule, proposée et mise en honneur par une école contemporaine, n'est guère que la formule écossaise du sens commun, rajeunie et continuée sous un autre nom dans l'histoire; également vague, elle masque le même malentendu. Que faut-il appeler inconce

vable? Ce que nous ne saurions nous représenter? Mais il est des choses que l'on conçoit très nettement et que l'on ne se représente pas. La netteté de l'image est même presque toujours en raison inverse de la netteté de l'idée, car, plus le dessin du schème sensible est précis, moins le concept qu'il recouvre et que la raison doit en dégager est distinct. L'inconcevable, en ce cas, ne serait donc, à proprement parler, que l'inimaginable. Comment alors le définir? Est-ce l'obstacle qu'oppose à une croyance le préjugé fondé sur de longues habitudes d'esprit, sur des associations familières? Mais un tel obstacle a ses limites. Il est des faits avérés et scientifiquement établis, qui ont passé longtemps pour d'inconcevables hypothèses. Nous croyons aujourd'hui sans hésiter à l'existence des antipodes et au mouvement de la terre; les objections du temps passé nous semblent futiles et n'ont plus sur nous aucune prise. Pourquoi? C'est que, si puissant qu'ait été le préjugé sensible, la raison a fini par le vaincre, comme elle vaincra peu à peu le préjugé, vivace encore aujourd'hui, qui porte le vulgaire à croire que les objets sapides, odorants ou colorés, sont en eux-mêmes ce qu'ils nous paraissent. Les sens nous trompent constamment; la mission de la science est de restaurer la vérité compromise par leur témoignage. Dans un but d'utilité pratique immédiate, ils renversent, dirait-on, la réalité; la raison, lentement mais sûrement la redresse, et nous la fait connaître, au point de vue spéculatif, telle qu'elle est. « Il semble que nous soyons traités par la nature, dit un savant anglais contemporain, comme ces enfants que leurs nourrices font tourner dans leurs bras et qui croient que la chambre tourne autour d'eux. » L'illusion dure tant que leur raison reste endormie; dès qu'elle s'éveille, l'erreur disparaît. — C'est là l'histoire de tout préjugé sensible. Nous éprouvons une invincible propension à croire, que l'objet de notre croyance soit intelligible ou non. L'inconcevable n'est bien souvent que l'incroyable.

Quelquefois cependant, nous appelons inconcevable une

proposition dont les deux termes ne sauraient, quelque effort que nous fassions, être unis dans la conscience. N'est-ce pas là le critérium que nous cherchons? Craignons encore l'équivoque. Il peut se faire que l'esprit soit impuissant à unir deux termes dont les rapports lui échappent, sans que pour cela ces termes s'excluent; l'impossibilité d'affirmer n'est pas la nécessité de nier. L'esprit humain a des bornes qu'il ne peut franchir; ce n'est qu'en deçà de ces bornes qu'il exerce légitimement son pouvoir essentiel, fondé sur le principe de contradiction.

Le terme inconcevable devrait être banni de la logique comme susceptible de trop d'interprétations diverses. Nous lui substituerons le terme inintelligible. Est inintelligible une proposition, quelle qu'elle soit, dont les termes sont logiquement incompatibles, une proposition telle enfin que nous concevions très nettement qu'une pensée capable de la concevoir se détruirait. Il est inintelligible que « deux et deux fassent cinq » ou que « entre deux points le plus court chemin soit une courbe. » Dire oui et non de la même chose, en même temps et sous le même point de vue, c'est se contredire, et, pour l'entendement, la contradiction, c'est la mort.

Le principe de contradiction, il est vrai, ne nous conduit au but que par des chemins détournés; la méthode qui consiste à nier l'existence simultanée des contraires n'atteint la vérité que par voie d'éliminations successives. — Nous le reconnaissons, mais dans les spéculations qui ont pour objet l'absolu, nul autre procédé n'est possible. — L'être caché que Kant appelait *noumène* ne se révèle à nous que sous certaines conditions qui sont les lois mêmes de l'intuition sensible, et qui nécessairement l'altèrent. Chercher à soulever le voile qui nous le dérobe, c'est s'engager par avance à le poursuivre, s'il se peut, au delà de la représentation grossière qui nous en est donnée, et à affirmer de lui certains attributs qu'il serait puéril de vouloir imaginer. Si savante qu'elle puisse être, jamais une théorie rationnelle ne mettra sous nos yeux la chose en soi; c'est que la chose en soi est et sera toujours

rebelle aux conditions subjectives qui la rendraient saisissable. Demander, comme on le fait parfois au philosophe, de rendre sensibles les principes dont il affirme l'existence, c'est lui demander l'impossible, c'est le condamner à rendre l'absolu relatif. Étrange prétention que celle du vulgaire! On prie le métaphysicien de donner une figure à des parties que l'on suppose élémentaires, et, s'il refuse, on dit que ses spéculations ne se conçoivent pas! Nous croyons, pour notre part, que rien n'existe réellement qui puisse être représenté à l'imagination ou aux sens. Ce sont les collections qui sont visibles et tangibles; et une collection, en dehors des éléments qui la constituent, est une abstraction pure et simple.

Résumons notre pensée : Le *phénomène* se représente ou se conçoit, mais nous n'avons d'autre chance d'atteindre le *noumène* que celle qui nous est offerte par la méthode d'exclusion dont nous venons de parler. En face de ces éléments ultimes de la réalité que l'intuition sensible doit désespérer d'atteindre, il ne nous reste qu'une chose à faire : retrancher de leur définition tout ce que nous contraint d'en retrancher le principe de contradiction, dernier mais solide appui de la pensée.

Fondés sur ce principe, nous nous proposons d'établir que le Réel et l'Infini sont deux termes contradictoires et conséquemment :

1° Que le fini qualifie nécessairement le concret;

2° Que, sous certaines conditions, l'indéfini se conçoit comme l'attribut de l'abstrait.

CHAPITRE III

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES ET DIVISION GÉNÉRALE DU SUJET

1° Définitions des termes indéfini et infini. — Jusqu'à quel point il importe, avant toute discussion, de circonscrire exactement ces idées.
2° L'indéfini et l'infini soit en grandeur soit en petitesse. — Quelles sont les quantités que ces termes peuvent qualifier.
Énoncé de la thèse et plan général.
1° Dans le réel ou le physique, l'infini de grandeur ou de petitesse est contradictoire, le fini seul est concevable. — Nécessité d'établir cette proposition : 1° en ce qui concerne la matière; 2° en ce qui concerne le lieu, la durée et le mouvement considérés comme quantités objectives. — En quel sens on peut dire que les quantités de ce second groupe sont réelles.
2° Dans l'abstrait ou le mathématique, l'infini n'est que l'indéfini. — Pourquoi? — Les quantités précédentes, y compris la matière, peuvent toutes être pensées, abstraction faite de certaines exigences extérieures et objectives. — L'entendement leur impose alors sa loi propre, qui, dans l'abstrait, est celle de l'indéfini.

Commençons par fixer la signification des termes. Fini veut dire borné, et le sens de ce mot est si clair que, lorsqu'on l'emploie, nulle confusion n'est à craindre. Infini au contraire signifie sans bornes; mais ici l'équivoque est facile. Sans bornes veut dire, en effet, tantôt sans limites fixes, tantôt sans limites, quelles qu'elles soient. Une quantité en progrès continu est sans bornes, en ce sens qu'aucune limite précise ne la détermine; une quantité qui aurait atteint la limite des progrès possibles serait aussi sans bornes, mais à un titre supérieur. Voilà pour le même mot deux significations distinctes et opposées, l'une négative, l'autre positive. Ici, la pauvreté relative que nulle addition d'être ne pourra

combler; là, au contraire, la suprême richesse. D'une part, le besoin d'acquérir, de se développer sans cesse; de l'autre, la plénitude qui rend tout développement inutile et même impossible [1].

Deux notions aussi distinctes doivent être caractérisées par des termes différents. Infini signifiera pour nous achevé ou sommé : achevé, s'il s'agit d'un être, sommé, s'il s'agit d'une quantité. Ainsi le nombre infini, s'il existe, sera à nos yeux le nombre limite, le nombre qui enveloppe tous les autres, sans être enveloppé lui-même par aucun. Le terme indéfini, au contraire, désignera toujours cette forme fuyante de la quantité qui s'accroît sans cesse sans que l'accroissement final soit jamais acquis.

D'après ce qui précède, le Fini et, s'il existe, l'Infini véritable, ne seraient pas sans analogie. L'idée de limite fixe semble convenir à l'un et à l'autre; mais, appliquée au Fini, l'idée de limite équivaut à l'idée de borne ou de défaut; appliquée à l'Infini, elle marquerait plutôt l'achèvement ou la perfection; la limite, dans ce dernier cas, serait, non la limite de l'être, mais la limite des limites.

Revenons à l'opposition fondamentale de l'Indéfini et de l'Infini. L'un et l'autre se développent soit dans le sens de la grandeur, soit dans celui de la petitesse. Cette distinction, entrevue par Platon [2], est devenue depuis familière aux savants et aux philosophes : de là les termes d'infiniment petit et d'infiniment grand.

L'Infiniment petit, au sens rigoureux du mot, peut se concevoir comme absolu ou comme relatif. — Absolu, c'est le néant pur, car la limite des diminutions possibles est zéro. — Relatif, c'est l'extinction de telle quantité, non de toute quantité. Un angle infiniment petit, par exemple, ne serait plus un angle,

1. Il est bien entendu qu'ici nous faisons abstraction de la possibilité intrinsèque du nombre infini. Il ne s'agit, pour le moment, que de fixer avec exactitude le sens des termes.

2. Πλάτων δύο τὰ ἄπειρα ἐποίησεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τὴν αὔξην δοκεῖ ὑπερβάλλειν, καὶ εἰς ἄπειρον ἰέναι, καὶ ἐπὶ τὴν καθαίρεσιν. (*Phys.*, liv. III, ch. VIII.)

mais serait encore une quantité représentée par une ligne [1].

L'indéfiniment petit, qu'en mathématiques on peut, sans grave inconvénient, confondre avec l'infiniment petit véritable, mais que le métaphysicien, pour éviter la plus dangereuse des confusions, doit définir exactement, n'est qu'une quantité mobile, susceptible d'approcher sans cesse, bien qu'elle ne l'atteigne jamais, soit du zéro relatif, soit du zéro absolu, en d'autres termes de l'extinction de telle quantité, ou de l'extinction de toute quantité, quelle qu'elle soit [2].

L'infiniment grand et l'indéfiniment grand donneraient lieu aux mêmes distinctions. — Si le premier est possible, en le concevant, nous devons concevoir comme déjà atteinte la limite supérieure de la quantité. — Le second fait penser à un progrès indéfini, bien que toujours et nécessairement en deçà de cette limite.

L'indéfiniment petit suggère l'idée du continu. Une grandeur est continue lorsqu'on passe d'un état à un autre de cette grandeur, à l'aide de transitions insensibles ou indéterminées : insensibles, s'il s'agit de quantités que l'on perçoit, comme le filet d'eau qui coule ou le corps solide qui se dilate; indéterminées, s'il s'agit de quantités que l'on conçoit seulement : tels la ligne, la surface, le volume mathématiques. Dans l'un et l'autre cas, les différences successives, sans lesquelles on ne saurait concevoir la grandeur en mouvement, sont aussi petites qu'on le voudra, c'est-à-dire, selon les définitions précédentes, indéfiniment petites.

Que le continu existe dans l'abstrait, lorsqu'il s'agit de certaines grandeurs, comme l'étendue géométrique, par exemple, c'est ce que tout le monde accorde; mais plusieurs nient qu'on puisse l'affirmer légitimement du concret. Nous n'avons pas, pour le présent, à nous préoccuper de ce désaccord; nous définissons les termes que nous nous propo-

1. Rappelons qu'infiniment petit est pris ici au sens absolu ou métaphysique du terme. — Au sens mathématique, un angle infiniment petit n'est le plus souvent qu'un angle indéfiniment décroissant.

2. Cette définition répondrait exactement à celle de l'infinitésimale de Leibniz.

sons d'employer, abstraction faite de toute solution ultérieure.

Les objets que l'on peut nombrer sont appelés discontinus. Un monceau de sable, par exemple, est une grandeur discontinue ou discrète, parce que les parties qui le composent sont en nombre déterminé et séparables. Ces parties peuvent être *contiguës*, mais la *contiguïté* n'est qu'une *continuité accidentelle*, où la raison aperçoit toujours des éléments distincts, bien que rapprochés.

Ces définitions posées, il ne nous reste plus qu'à aborder le problème qui nous occupe, et à nous demander si l'infini peut ou non qualifier la quantité. La question se subdivise, la quantité pouvant être concrète ou abstraite; on comprend d'ailleurs qu'à chacun de ces deux points de vue il soit indispensable d'envisager l'infini sous ses deux faces, celle de l'infiniment petit et celle de l'infiniment grand.

L'infiniment petit peut-il être affirmé de la quantité concrète?

Cette question, que nous nous posons la première, demande, pour être résolue, que nous nous fassions de la quantité concrète une idée précise. Une quantité concrète est une quantité telle que nous l'offre la nature, avec l'ensemble des propriétés qui la constituent. Qui dit concret, ainsi que l'étymologie du mot le fait entendre, dit armé de toutes pièces, muni de tous les ressorts ou de tous les organes nécessaires à l'existence. Mais l'esprit, en pénétrant dans l'étude d'un composé réel, détruit nécessairement cette vivante synthèse, car il ne peut acquérir que par degrés la notion du tout : il distingue donc et met à part des propriétés qui, séparées les unes des autres, ne sont plus que des propriétés mortes et qu'il nomme abstraites. S'il en est ainsi, le concret est dans la chose même; l'abstrait est surtout dans la pensée qui cherche à la concevoir.

Quelles sont maintenant les quantités concrètes que nous devons examiner pour savoir si, oui ou non, l'infiniment petit les qualifie?

La *matière* s'offre d'abord à notre étude : — c'est une quantité — car elle est divisible; — concrète — car, à moins

de professer un idéalisme voisin du scepticisme absolu, nous ne saurions nier qu'elle existe à titre de réalité en soi et pour soi.

On sera plus embarrassé s'il s'agit de grandeurs, comme le *lieu*, le *nombre*, la *durée*, le *mouvement*, et cependant il faut prendre parti, si nous voulons donner à notre solution un caractère de généralité suffisant.

Le *nombre* peut être conçu comme abstrait ou comme concret ; concret, il représente des unités ou des collections réelles ; abstrait, il existe à part, détaché des réalités discontinues qu'il permet de nombrer, ou des parties égales de la grandeur continue dont il représente la somme.

C'est à titre de quantité concrète qu'on se propose d'abord d'étudier le nombre.

L'*étendue*, à son tour, présente deux faces, l'une concrète et réelle, l'autre purement intelligible. C'est ce qu'ont plus ou moins explicitement reconnu la plupart des philosophes [1]. Comment, en effet, confondre la portion déterminée de l'espace qu'occupe un corps avec l'étendue idéale correspondante? L'espace dans lequel se meuvent mes membres s'épuise, puisque je peux le franchir ; l'espace pur du géomètre est tel que, de subdivision en subdivision, l'opérateur ne l'épuise jamais. Je dois donc le distinguer du lieu en soi, du lieu objectif, dépendant du corps dont il est le réceptacle, et, par suite, de conditions étrangères à la pensée [2].

Ainsi de la *durée*. Une durée quelconque, si courte qu'on

1. Il faut faire une exception pour les cartésiens, qui croyaient que l'étendue idéale ou géométrique est la substance même, ou, si l'on veut, l'étoffe des corps. Malebranche, toutefois, distingue positivement l'étendue essentielle à la matière, de l'étendue intelligible. Leibniz est plus explicite encore. Il établit entre le lieu réel et le lieu idéal une différence telle qu'il accorde au premier un privilège qui, selon lui, n'appartient qu'à la réalité véritable, c'est-à-dire l'infinité proprement dite, tandis qu'il la refuse toujours au second.

2. Le lieu, assurément, ne saurait être concret au même titre que le corps qui l'occupe. Il est conçu comme pénétrable, puisqu'en fait nous le voyons occupé. Il n'a donc pas la réalité de la substance. Toutefois, il ne se prête pas, non plus, sans une résistance au moins idéale à toutes les opérations de la pensée. C'est ce qui le distingue de la quantité abstraite correspondante, quantité purement subjective et toute dépendante de l'esprit. Le lieu dépend de la réalité matérielle ; l'étendue idéale, de l'entendement qui le divise et le subdivise à son gré.

l'imagine, peut, dès qu'elle a été détachée des événements successifs qui l'engendrent et la mesurent, se subdiviser à l'indéfini. Comme toute quantité abstraite, elle est abandonnée aux exigences de l'esprit : *res ad omnia parata*. Mais il est plus que douteux que cette même durée, envisagée du point de vue objectif et dans la réalité des phénomènes avec lesquels elle fait corps, se laisse traiter de la sorte. Que l'esprit répète à son gré, dans l'abstrait, une opération qu'aucune raison ne vient jamais suspendre, rien de plus légitime; mais qu'il essaye une opération semblable sur une quantité que des raisons étrangères fixent et déterminent comme telle, voilà ce qu'à aucun titre on ne saurait justifier; à ce second point de vue, la durée mérite le nom de quantité concrète, sinon au même titre que la matière, du moins au même titre que le lieu en soi.

Même opposition enfin dans le *mouvement*. Conçu comme abstrait, il apparaît aussitôt comme continu. Quoi de plus naturel dans l'hypothèse toute mathématique d'une étendue idéale, continue elle-même, et par conséquent toujours divisible? Rien ne prouve, au contraire, que, dans le lieu réel et pendant une durée déterminée en soi, le mouvement ne doive fournir un certain nombre d'étapes nécessaires. Dès lors, nous nous le représentons comme objectif, et il devient concret comme la durée et le lieu réels.

Ces prémisses posées, le problème que nous devions aborder le premier apparaît maintenant dans sa généralité complexe :

1° Le concept de l'*infiniment petit* est-il ou non compatible avec la *quantité concrète*, envisagée sous toutes les formes, *matière*, *lieu*, *durée*, *mouvement en soi?*

Cette question en appelle une autre :

2° Le concept de l'*infiniment grand* est-il ou non soumis, dans les mêmes circonstances, à la même loi?

Un dernier problème se pose nécessairement :

3° Quelles relations existent entre les deux concepts précédents et la *quantité abstraite?*

C'est là tout le plan de ce travail.

DEUXIÈME PARTIE

L'INFINI DANS LA NATURE

CHAPITRE PREMIER

L'IDOLE DE L'INFINIMENT PETIT ET LA MATIÈRE

Le concept de la matière exclut logiquement celui de l'infiniment petit.
Moments successifs de la preuve.
a. La matière non seulement divisible, mais effectivement et actuellement divisée. — Le mouvement, s'il était intelligible dans l'hypothèse d'une matière continue, devrait être instantané. — Ondulations et vibrations.
La matière subit donc la loi du nombre.
b. Le nombre des parties qui constituent un agrégat matériel ne peut se concevoir comme indéfini.
Considérations *a priori.* — Dans un tout donné, les parties élémentaires doivent être données, ce qui est impossible si elles sont en nombre indéfini. — L'existence principe de l'individualité ou de la détermination.
Appel à l'expérience.
Les différences de poids et de densité inexplicables dans l'hypothèse du nombre indéfini; les phénomènes de condensation et de raréfaction inintelligibles.
Les lois chimiques réfractaires au concept de l'indéterminé et du continu. — Proportions définies. — Proportions multiples. — Equivalents. — Comment interpréter la loi des équivalents? — La nature, qui nous montre partout le discontinu et le défini, ne peut travailler sur deux plans opposés. — Secchi. — L'Isomorphisme. — Mitscherlisch. — Conclusion.
c. Le nombre des éléments constitutifs d'un tout matériel ne saurait non plus se concevoir comme infini.
Considérations *a priori.*
Incompatibilité radicale des termes nombre et infini. — Objection. — L'infini supérieur au nombre. — Leibniz et quelques philosophes contemporains. — Réponse : Toute multiplicité actuelle doit subir la loi du nombre.
Inductions de l'expérience.
Impossibilité d'un tout matériel continu dans l'hypothèse de l'attraction

moléculaire. — Poisson. — Cauchy. — Saint-Venant. — Si l'on rejette l'attraction moléculaire et par suite l'action à distance, comment expliquer les phénomènes du choc et de la communication du mouvement?

d. Le nombre des parties élémentaires d'un agrégat matériel ne pouvant se concevoir ni comme indéfini ni comme infini, doit être conçu comme fini.

e. Si le nombre des éléments, dans un tout donné, est nécessairement pensé comme fini, chaque élément doit être pensé comme indivisible.

f. Si l'élément ne peut être qu'indivisible, il ne peut être qu'inétendu. — Discussion. — Ampère. — Cauchy. — Objections de l'imagination proposées le plus souvent par des philosophes géomètres. — Pascal. — Euler. — Réponses.

g. L'élément conçu comme indivisible et inétendu, n'est encore conçu que négativement. — L'élément force. — Ce que c'est que la force. — Divers sens de ce terme. — La force peut-elle être pensée et en quel sens?

h. Essai de synthèse, en vue de confirmer la précédente analyse.

Point de départ : éléments dynamiques. — Comment leur juxtaposition peut donner naissance à l'idée de l'étendue.

L'étendue ne se conçoit ni comme réalité substantielle ni comme catégorie. — Composantes probables de cette notion : pluralité de sensations *entopériphériques*, et ultérieurement de sensations de résistance, dans l'unité de temps. — S'il en est ainsi, la multiplicité extérieure doit suffire à l'engendrer.

A l'étendue matérielle doit être attaché le pouvoir de réagir si les éléments qui la constituent sont des forces.

Origine de la couleur et des autres sensations. — Fondement naturel de la distinction entre les *propriétés premières* et les *propriétés secondes*, la matière grossière et la matière subtile.

Conclusion.

Parmi les quantités que nous avons à examiner, il n'en est pas de plus importante que la matière. Essayons de montrer que son concept exclut logiquement celui de l'infiniment petit.

On peut poser en principe que la matière est discontinue. A la vue et au toucher, il est vrai, les corps semblent jouir d'une continuité apparente; mais alors, comme toujours, l'expérience sensible nous trompe; vus au microscope, ces mêmes corps apparaissent criblés d'un nombre incalculable d'espaces vides ou de pores. On serait donc mal venu à soutenir que la matière, naturellement indivise, ne se fragmente que lorsqu'un agent mécanique lui fait violence; elle est plus que divisible; elle est réellement et actuellement divisée : la porosité est une de ses propriétés essentielles, comme l'impénétrabilité ou l'inertie.

Dira-t-on que les parties qui semblent séparées au microscope, sont unies par d'étroits mais invisibles liens? Dans ce cas, de deux choses l'une : — ou les éléments subtils destinés à servir de traits d'union sont séparés les uns des autres, et alors les liens dont on parle, toujours renaissants et toujours détruits, se coupent en segments successifs qui, impuissants à se réunir eux-mêmes, ne peuvent servir à relier entre elles d'autres quantités; — ou ces mêmes éléments sont supposés continus, et alors ce sont les faits qui protestent. Comment expliquer, par exemple, que les corps se contractent par le refroidissement, et se dilatent sous l'action de la chaleur? Faut-il admettre que les liens qu'on a imaginés se contractent eux-mêmes ou se dilatent? Mais, dans l'hypothèse de leur continuité, la contradiction serait flagrante. Suppose-t-on, au contraire, que, sans se raréfier ni se condenser, la matière subtile pénètre dans l'intérieur des corps qui s'échauffent, et abandonnent ceux qui se refroidissent? La difficulté n'est que reculée. Le plein étant donné, il faut expliquer le mouvement.

Le mouvement existe; c'est un fait. Est-il possible d'en rendre compte si l'on soutient que la réalité est continue? — On sait comment Descartes fut amené à nier le vide. Confondant les lois de la pensée et celles de l'être, il n'hésita point à soutenir que tout ce que nous pouvons concevoir comme divisible est réellement et actuellement divisé. De là l'impossibilité d'indivisibles ou d'atomes, et l'existence nécessaire du plein. Mais, dans une semblable hypothèse, le mouvement ne se conçoit plus que suivant des anneaux fermés et sous forme de tourbillons; encore n'est-ce qu'avec une peine extrême qu'on arrive à tout expliquer mécaniquement sans condensation ni raréfaction de la matière. Faut-il revenir à cette conception surannée? Les phénomènes de chaleur, d'électricité et de lumière, étudiés de si près par la science contemporaine, nous l'interdisent formellement. La plupart, sinon tous paraissent dus à des vibrations. Or comment expliquer, dans l'hypothèse du plein, ces mouvements rythmiques de va-et-

vient dont la rapidité est incalculable ? Comment, ces ondes d'éther, vagues lumineuses qui s'éloignent et se rapprochent sans cesse les unes des autres dans l'immensité de l'espace? Des vibrations qu'elles engendrent, et que l'on s'accorde à regarder comme transversales, les unes d'après l'opinion la plus probable suivent une série de lignes parallèles : de là les rayons polarisés ; les autres se produisent dans toutes les directions que l'on peut concevoir autour d'un centre et donnent naissance aux rayons naturels. C'est ce qu'ont vu et exposé avec toute l'autorité qui s'attache à leurs travaux Fresnel et Cauchy. Nous voilà bien loin des anneaux fermés de Descartes. « Les phénomènes lumineux ne sont intelligibles, dit l'illustre auteur de l'unité des forces physiques, que si le mouvement se produit suivant des courbes de toute espèce et des lignes droites croisées dans tous les sens [1]. » — A plus forte raison les évènements de la nature pris dans leur ensemble. — Quelle que soit l'opinion qu'on professe en ces matières, quelles que puissent être, en ce qui concerne les modes possibles du mouvement, les divergences d'idées des savants contemporains, rien du moins n'est plus certain que cette proposition : le mouvement existe et n'est pas instantané, on le prouve, même pour ces ondulations rapides qui nous transmettent la lumière ; or ce fait entraîne après lui une conséquence rigoureuse : c'est que les lignes suivant lesquelles le mouvement se transmet ne sont ni géométriques ni rigides, car, dans le cas contraire, le mouvement devrait se produire, en un même instant de la durée, aux deux extrémités de chacune d'elles. Il faut donc qu'il existe des intervalles entre les parties de la matière, même la plus ténue, et que par conséquent le vide existe.

Mais c'est peu d'avoir établi en fait la discontinuité de la matière ; reste à prouver qu'un corps, si ses parties sont discontinues, tombe sous l'inflexible loi du nombre et ne peut plus se concevoir comme divisible à l'infini.

1. Secchi, liv. II, ch. VII, p. 237.

Parvenus à ce second stade de la démonstration, nous nous trouvons en face de trois hypothèses, et de trois hypothèses seulement. — Ou le nombre des parties intégrantes d'un corps est indéfini — ou il est infini au sens rigoureux du terme — ou il est fini. — Les deux premières propositions écartées, nous nous proposons d'établir que la troisième seule est rationnelle.

I

En premier lieu, soutenir qu'un corps est composé d'un nombre indéfini de parties, c'est se contredire soi-même; car, s'il en est ainsi, d'une part le corps est donné, de l'autre les parties qui le constituent ne le sont pas : ce qui implique.

Le corps est donné : c'est l'évidence même. Il existe, il est déterminé comme tel ou tel; on peut indiquer ses dimensions, décrire sa forme, évaluer sa masse. Que les parties dont il est composé ne le soient pas, rien également de plus certain, car, si leur nombre est indéfini, il est indéterminable, et, s'il est indéterminable, la nature ne le déterminera jamais en lui conférant l'existence.

Pénétrons plus avant dans cette pensée. L'existence est le principe même de l'individualité ou de la détermination. Dire qu'un être indéterminé existe, c'est unir violemment deux notions qui s'excluent; un être qui ne serait ni simple ni composé, ni grand ni petit, ne serait pas ou ne serait qu'en puissance. C'est ce qu'a compris et repété sous toutes les formes la philosophie ancienne. De même, un nombre indéfini qui, néanmoins, serait actuel, réaliserait la plus monstrueuse des contradictions, car, étant actuel, il eût été ou se serait produit; par suite, il eût été ou se serait nombré lui-même, et son indétermination supposée serait dès lors absolument inintelligible.

En thèse générale, ce qui existe, ce qui est donné par la nature, ne peut en aucune façon se concevoir comme indéterminé ou indéfini. Une chose en soi est telle ou telle, et ne

saurait être, au gré du caprice intellectuel, telle ou telle autre.

Pour donner plus de corps à l'argumentation qui précède, mettons-nous, pour un moment, dans l'hypothèse de nos adversaires. Imaginons deux corps sous la forme de deux indéfinis actuellement parvenus à l'existence. Il ne saurait y avoir aucune différence quant au nombre des parties entre l'un et l'autre; si l'un, en effet, avait moins de parties que l'autre, il ne serait pas indéfini, ce qui contredirait l'hypothèse [1].

Ce principe posé, soit deux sphères solides d'un métal donné, de plomb, par exemple, P et *p*, l'une d'un centimètre, l'autre d'un millimètre de rayon. Si les parties qui les constituent sont de part et d'autre indéfinies en nombre, leur nombre sera de part et d'autre le même, et, comme par hypothèse la densité est la même aussi les deux sphères étant de même métal, aucune différence ne sera possible dans le poids, ce qui est en opposition formelle avec les faits.

La difficulté n'est pas moindre s'il s'agit d'expliquer la densité ou la masse. Qu'est-ce qu'un corps plus dense qu'un autre, sinon un corps qui possède plus de masse qu'un autre sous le même volume? Or, dans l'hypothèse où se placent nos adversaires, cette définition n'a pas de sens. Tient-on pour l'unité de substance, il faut admettre que le nombre des éléments est plus grand lorsque la masse est plus compacte; mais, nous venons de le voir, le plus et le moins sont incompatibles avec l'indéfini. Suppose-t-on, contrairement aux inductions de la science, que les atomes, de part et d'autre en

1. On admet en mathématiques l'existence d'indéfinis de différentes grandeurs, mais ces indéfinis sont enfermés entre des limites certaines et ne sont tels que pour leur contenu. Le nombre des parties en réalité diffère; mais, comme ce nombre nous échappe, nous affirmons qu'à notre point de vue il est partout également indéterminé ou indéfini.

Soit deux lignes, l'une d'un centimètre, l'autre d'un décimètre de longueur. On dira à la vérité qu'elles enferment toutes deux un nombre indéterminé de parties, mais on ajoutera que ce nombre, quel qu'il soit, est dix fois plus considérable dans l'une que dans l'autre. De tels indéfinis ne sont indéfinis que sous certaines réserves. On les suppose définis en eux-mêmes, bien qu'ils ne puissent l'être pour nous.

même nombre, possèdent des masses différentes? Alors autant de poids spécifiques, autant d'espèces distinctes de substances; mais, outre que cette hypothèse crée une multiplicité gratuite et encombrante, il n'est point aisé de concevoir comment les unités de masse diffèrent selon les substances qui les caractérisent et les qualifient. Si ces unités sont inétendues, comment l'inétendu diffère-t-il de lui-même? Si elles sont étendues, elles ne peuvent l'être qu'également, puisqu'il s'agit d'expliquer sous le même volume des densités différentes, et alors, pour une raison semblable, la solution devient impossible. Tout étant de part et d'autre identique, où trouver le principe de la distinction, l'origine de la différence[1]?

D'ailleurs un phénomène remarquable et qui mérite d'exciter au plus haut point l'attention du savant et du philosophe, est celui que présente la chute des corps. Tous, quels que soient leur poids, leur volume, leur forme, tombent avec une égale vitesse dans le vide. Qu'est-ce à dire, sinon que les derniers éléments sont identiques quant à la pesanteur, en d'autres termes, qu'ils ont le même poids, et conséquemment que la densité d'un corps ne dépend que de leur nombre?

Au cas même où l'on croirait pouvoir rendre compte de la densité dans l'hypothèse de l'indéfini, comment expliquer un fait analogue, la condensation? La condensation n'est que l'accumulation d'éléments épars sous un volume plus restreint. Or on ne saurait le nier, à égalité de volume, ces éléments, tous par hypothèse de même substance, pèsent plus condensés que raréfiés. Osera-t-on soutenir que, sous le même volume, ils sont, dans les deux cas, en même nombre? et, si leur nombre diffère, que devient la thèse de l'indéfini?

Il est peu de phénomènes physiques qu'on ne puisse alléguer en faveur de l'opinion qui réduit la matière à un nombre fixe et invariable d'éléments. Les données de la chimie sont

1. On peut soutenir, à la rigueur, que les forces constitutives de la matière sont plus ou moins intenses, mais ce ne serait dans la bouche de nos adversaires qu'une affirmation sans preuves, et il serait curieux de voir le matérialisme se défendre en alléguant la proposition même à laquelle nous prétendons l'amener : les éléments sont des forces.

plus précises encore et plus positives. Les principes fondamentaux de cette science excluent de la matière jusqu'à l'apparence de l'indétermination.

C'est un fait acquis depuis les travaux de Wenzel [1] et de Richter [2] que les corps s'unissent ou dans une seule proportion, ou suivant un petit nombre de proportions déterminées. Supposons qu'une quantité définie d'un corps s'unisse chimiquement à une quantité définie d'un autre corps; quelles que soient les quantités de ce corps qu'on mette ensuite en présence, elles s'uniront toujours dans le rapport précédent : l'excédant ne se combinera pas, à moins qu'il ne soit apte à se combiner dans une proportion nouvelle pour créer un produit absolument distinct du premier. Voilà une première loi, celle des *proportions définies*, qui régit sans exception toutes les combinaisons d'un ordre donné et en bannit l'arbitraire.

Ce n'est pas tout. En partant d'une combinaison première de deux corps simples, combinaison déjà déterminée par la loi précédente, on remarque que les éléments seront dans toutes les autres en progression simple avec ceux de la combinaison élémentaire. L'un des éléments restant fixe, l'autre par exemple croîtra comme les nombres 1, 2, 3 ou encore 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$. Telle est la loi des *proportions multiples*, découverte, il y a plus d'un demi-siècle, par le génie de l'illustre professeur de Manchester, *Dalton*, et confirmée aujourd'hui par tous les faits dont la science s'est enrichie. Et il est digne de remarque que cette loi ne régit pas seulement, ainsi que l'avait cru son auteur, les poids des substances, mais les volumes même des gaz qui s'unissent chimiquement.

Ce sont là des faits révélateurs. Il est impossible de trouver dans ces formules déjà anciennes la moindre trace d'indétermination ou de continuité mathématique. Tout est précis, tout est arrêté. En deçà de telle quantité fixe, déterminée à

1. Wenzel, chimiste allemand, publia en 1777 un ouvrage sur les affinités des corps.
2. Richter, chimiste prussien, *Essais de stochiométrie*. 1798.

l'avance, la combinaison avorte; au delà, il y a excès, et le superflu demeure inerte et sans action.

De plus récentes découvertes ont mis en pleine lumière cette vérité. Il est établi par les expériences de Wollaston que deux corps, quels qu'ils soient, se remplàcent l'un l'autre dans leurs combinaisons avec les autres corps, de la même manière, c'est-à-dire dans la proportion suivant laquelle ils s'unissent entre eux. La loi des *nombres proportionnels* ou des *équivalents* ainsi formulée, nous permet donc de mettre en regard de chaque corps simple un nombre déterminé par l'expérience, nombre proportionnel à la quantité de matière de ce corps qui entre dans ses combinaisons chimiques. Le nombre ainsi obtenu est le *poids atomique* du corps.

On ne s'explique tout cet ensemble de faits qu'à l'aide de deux hypothèses, ainsi que l'a savamment fait observer M. Renouvier. « Ou il existe dans la nature, dit-il, certaines unités réelles dont les équivalents se forment, ou bien il n'existe point de telles unités naturelles, non plus qu'il n'existe d'unité, par exemple, pour la fraction décimale 0,6666.... envisagée idéalement dans son prolongement indéfini ; cependant, et de même que l'idée de cette fraction peut se représenter par le rapport de deux nombres entiers, 2 et 3, de même aussi le rapport des composants indéfinis dans un composé, est régi par la même loi que s'ils y entraient par nombre et unités déterminés [1]. »

On ne saurait être plus précis. Là en effet est le nœud du problème. Entre les deux suppositions, toutefois, M. Renouvier n'hésite pas. « La première est la plus nette et la seule claire; la seconde, impossible à représenter au point de vue des faits, devient pour nous apodictiquement fausse au point de vue logique, si nous réfléchissons que l'indéfinité des existences données est contradictoire et ne saurait être assimilée à celle des termes possibles d'une série dont le concept mathématique exclut toute limitation [2]. »

1. Extr. de la *Crit. philos.* (5e année, no 49).
2. *Ibid.*

L'argument principal en effet, celui qui domine tout le débat, et seul donne aux faits une valeur démonstrative, est celui-ci : Comment des parties indéterminées en nombre composeraient-elles un tout déterminé? Comment ce tout existerait-il, si les éléments qui doivent le constituer ne pouvaient parvenir à l'existence?

Certains chimistes philosophes, M. Dumas et M. Wurtz entre autres, tout en proclamant l'absolue nécessité de résoudre les corps quels qu'ils soient en unités d'un certain ordre, hésitent à croire que ces unités se résolvent elles-mêmes en un nombre défini d'éléments ultimes. Les équivalents n'ont donc à leurs yeux qu'une valeur relative. Ils représenteraient des groupes déterminés quant à leur nombre, indéterminés quant à leurs parties intégrantes. La molécule selon M. Dumas [1], l'atome selon M. Wurtz [2], seraient seuls soumis aux formules de la chimie; au delà commencerait l'inconnu. Cette opinion, quelle que soit l'autorité des savants qui l'ont émise, est loin, ce semble, de donner pleine satisfaction à la pensée. Comment certains éléments se trouvent-ils soustraits aux lois de la chimie, sans l'être également à celles de la divisibilité physique? Et puis, lorsqu'à tous les degrés de l'investigation scientifique, si loin qu'on la pousse, la nature nous montre le déterminé et le fini, pourquoi vouloir qu'elle cache l'indéfini sous ses derniers voiles? Conçoit-on qu'elle travaille sur deux plans différents, opposés même, selon que son activité s'exerce ou ne s'exerce pas sous nos yeux? Et enfin, si elle le fait, comment parvient-elle à donner une apparence d'unité à des œuvres aussi discordantes, à réconcilier les contraires, à créer avec le négatif le positif, avec l'inachevable l'achevé?

D'ailleurs, sur ce terrain difficile et où nous ne craignons que trop que l'on conteste notre compétence, nous pouvons opposer les autorités aux autorités. M. V. Regnault et après lui l'illustre professeur du collège de France M. Ber-

1. Dumas, *Leçons du Coll. de France*, 6 et 7.
2. Wurtz, *Philosophie chimique*, p. 39. — Voir l'étude que M. Renouvier consacre à ces deux savants : Crit. philos., n° 49, 5e année.

thelot inclinent à croire que, là où les lois chimiques expirent, les lois physiques, celle de la divisibilité entre autres, sont également abolies[1]. On peut affirmer, sans crainte d'être contredit, qu'aujourd'hui l'opinion des infinitésimalistes est de plus en plus délaissée.

Dans l'ouvrage que nous avons eu déjà l'occasion de citer, Secchi s'exprime ainsi sur le sujet qui nous occupe[2] :

« Quand les chimistes eurent reconnu que les corps hétérogènes se combinent toujours suivant des *proportions déterminées*, ils admirent bien vite que la matière était composée de corpuscules différents les uns des autres par le volume et par le poids, lesquels se combinaient entre eux en nombre toujours très simple et suivant des rapports peu nombreux, spécialement dans les combinaisons numérales inorganiques. Ces corpuscules furent nommés par la plupart des chimistes, atomes, et cela uniquement pour la simplification du langage, car ils regardaient leur division comme possible, et ils se servaient de ce mot pour désigner ceux qui manifestement étaient composés. Certains savants plus scrupuleux, voulant éviter l'antilogie des termes, abandonnèrent le nom d'atome et lui substituèrent celui d'*équivalent*, lequel était indépendant de toute idée théorique et représentait seulement le rapport des poids suivant lesquels les substances se combinent *et se substituent l'une à l'autre d'une façon équivalente*. Théoriquement, l'équivalent défini et multiple n'est explicable qu'en supposant la matière composée de centres distincts et simples .. On croit assez généralement que l'on outrepasse les justes limites de la théorie en s'élevant des équivalents aux atomes, mais c'est à tort. Le fait d'équivalence est une donnée expérimentale, et la constitution atomique est la

1. *Synthèse chimique*, p. 154. « La conception de particules indivisibles ou d'atomes, dit M. Berthelot, paraît être la conséquence nécessaire des lois fondamentales qui président à la combinaison chimique. » L'auteur, toutefois, fait d'expresses réserves en ce qui concerne les hypothèses atomiques d'Avogrado et d'Ampère, hypothèses développées par quelques savants contemporains.

2. Secchi, *Unité des forces physiques*, 2e édition, 519.

déduction logique de ce même fait. Il est vrai que l'expérience, qui a pu prononcer sur le premier point, ne pourra jamais rien décider relativement au second. »

Sans doute, mais l'expérience, partout où elle est possible, vient confirmer le principe rationnel d'après lequel une somme donnée doit être composée de parties données. Après la loi des équivalents, c'est la loi des *chaleurs spécifiques*, qui prouve d'une façon péremptoire que les atomes élémentaires ont une capacité de mouvement thermique déterminée [1]; après cette loi, une loi plus vaste encore qui étend la formule précédente aux *équivalents électriques*. Un illustre chimiste anglais, Prout, se demande s'il n'existe point de rapports entre les poids spécifiques des corps à l'état gazeux et le poids de leurs atomes; sous l'empire de cette idée, il observe et arrive à se convaincre que les corps sont formés par la condensation d'une matière unique [2].

Et, dans la matière, ce n'est pas seulement le poids, le volume, la capacité thermique, électrique ou lumineuse, qu'atteint et régit le principe de détermination; les formes même semblent à l'avance définies. Les corps de constitution semblable ont souvent la même forme géométrique; ils sont, *isomorphes*. Ces faits observés pour la première fois par Gay-Lassac, ont reçu une grande extension grâce aux travaux de Mitscherlich, à qui l'on doit la plupart des séries isomorphes aujourd'hui connues. On a été plus loin. Hermann Kopp pose en règle générale « que le volume atomique de tous les corps isomorphes, simples ou composés, est le même, ou en d'autres termes que le poids spécifique des corps isomor-

1. Dulong et Petit ont déduit de leurs expériences sur la chaleur cette loi remarquable qu'on peut encore énoncer ainsi : « Une même quantité de chaleur élèvera du même nombre de degrés la température d'une quantité de chaque substance simple représentée par son poids atomique. »

2. La loi de Prout a été contestée par plusieurs chimistes, Berzélius et Mitscherlich entre autres; mais M. Dumas l'a adoptée en démontrant par les faits que, sauf deux exceptions, elle se vérifie constamment. Il suffirait, d'après lui, pour faire rentrer ces exceptions dans la règle, d'abaisser le poids pris pour unité. Cf. Secchi, *Unité des forces physiques* (518, 521).

phes est proportionnel à leur poids atomique, ou enfin que les molécules des corps isomorphes sont non seulement identiques quant à leur forme, mais encore quant à leur dimension [1]. »

Nous n'avons voulu et nous ne pouvions citer que les faits principaux. Interprétés par la raison, ils nous paraissent décisifs. La nature, à quelque profondeur qu'on l'observe, est d'accord avec la logique. Il est donc établi qu'on ne saurait, sans froisser le principe de contradiction et sans faire en même temps violence aux faits, supposer que la notion abstraite de l'indéfini ait quoi que ce soit de commun avec la réalité matérielle.

II

Un monde composé de parties réelles distinctes et séparables, en nombre *actuellement infini*, n'est, on le verra, pas moins contradictoire dans les termes. Sur ce point, savants et philosophes sont aujourd'hui presque tous d'accord. Mais laissons là les suffrages, et ne nous attachons qu'aux arguments.

La contradiction qu'enferme l'idée d'un nombre actuellement infini devient sensible lorsqu'on cherche à définir les deux notions qui la composent. Qui dit nombre dit quantité et, par suite, chose susceptible d'augmentation ou de diminution. Or, s'il est actuel, l'infini ne saurait être ni augmenté ni diminué. Les deux termes nombre et infini sont donc aussi incompatibles que les termes courbe et droit, rond et carré, et le nombre actuellement infini répugne à l'entendement.

Dira-t-on que le nombre infini, bien qu'il échappe à nos prises, existe, et qu'il est supérieur à tout nombre imaginable ? Nous répondrons, avec un éminent critique [2], qu'un

1. Moigno, *Aperçu de philosophie chimique*, p. 57.
2. Voir Renouvier, *Log.*, t. I, p. 56 et 57, et *Critique philosophique* passim, spécial. 5e année, n° 31.

nombre qui serait supérieur à tout nombre imaginable ne serait point un nombre, car, s'il l'était, il pourrait, comme tout autre nombre, être augmenté d'une unité. Encore une flagrante contradiction.

On peut présenter le même argument sous une forme plus saisissante. Le nombre infini qu'on imagine appartient-il à la série des nombres entiers 1, 2, 3, 4...? Si oui, il ne diffère du précédent, c'est-à-dire de celui qui vient immédiatement avant lui, dans la série, que d'une unité, et par suite il est fini comme lui. Sinon, qu'est-ce qu'un nombre qui n'appartient pas à la série des nombres possibles?

De savants mathématiciens se sont ingéniés, au point de vue spécial de leur science, à faire ressortir l'absurdité du nombre infini. Est-il pair ou impair? premier ou non premier? S'il est pair, il ne contiendra pas la série des nombres impairs; s'il est impair, il ne contiendra pas la série des nombres pairs. Supposons qu'il soit premier, il ne sera pas le dernier des nombres premiers, la série de ces nombres étant réputée indéfinie... Dans tous les cas, pair ou impair, premier ou non premier, ce nombre, ainsi que le faisait déjà observer Galilée, n'égalera pas son carré, son cube, sa n^e puissance, et, s'il l'égale, il faut admettre que la partie égale le tout.

La preuve de l'absurdité du nombre infini est faite depuis si longtemps, qu'on l'élude aujourd'hui plutôt qu'on ne l'attaque de front. Le nombre et l'infiui s'excluent, on le reconnaît; mais on ajoute aussitôt : Qui sait si cette proposition, justifiable dans l'abstrait, est certaine au point de vue de la réalité concrète? Il n'est nullement démontré que la vivante logique de la nature se conforme aux conceptions du géomètre; d'ailleurs on ne prétend pas que l'univers enferme un nombre infini de parties : ces termes seraient inexacts. L'idée de nombre est une idée subjective; attribuer un nombre, quel qu'il soit, fini ou infini, aux parties de l'immense tout qui nous enveloppe, c'est en méconnaître la grandeur et en profaner la majesté. Leibniz le comprit bien,

lui, qui, après avoir nié en mathématiques la possibilité du nombre infini, fit d'expresses réserves en ce qui concerne le monde réel, le monde sorti des mains de l'éternel et tout-puissant géomètre. Pourquoi ne pas admettre avec lui qu'il existe ou peut exister dans l'univers une pluralité vraiment infinie d'éléments, pluralité telle qu'aucun nombre ne saurait l'exprimer, aucun calcul en approcher, même de loin? Au sein de l'étendue sans limites flotteraient des multitudes sans nombre de sphères, composées elles-mêmes de multitudes sans nombre de parties. Y a-t-il rien de contradictoire à supposer que l'œuvre de Dieu dépasse de l'infini les calculs de l'homme?

Il nous est impossible de souscrire à ces conclusions. Que l'on distingue l'abstrait du concret dans les questions de l'ordre de celle qui nous occupe, et que l'on pose en principe que ce qui existe dans l'un de ces deux domaines n'existe pas pour cela nécessairement dans l'autre, on en a le droit; mais il faudrait ajouter que ce qui dans l'un est contradictoire est dans l'autre irréalisable. Nul ne croira jamais à l'existence concrète du cercle carré, et, s'il fallait en donner la raison, on la chercherait dans l'incompatibilité logique de ces deux termes. Le possible n'enveloppe pas le réel, mais le réel enveloppe nécessairement le possible; bref, la contradiction dans les termes ne saurait prétendre à l'existence. — L'idée de nombre, dit-on, est toute subjective; la pluralité, au contraire, existe ou peut exister en dehors de nous. — La portée d'une telle distinction nous échappe. La pluralité et le nombre, comme tout ce qui est mentalement représenté, doivent exister à la fois dans l'esprit et dans les choses. Si la pluralité n'était qu'objective, quelle idée pourrions-nous nous en faire et comment en parlerions-nous? D'ailleurs on reconnaît que l'esprit lui impose la mesure du nombre; où trouve-t-il donc la notion de pluralité, sinon en lui-même, comme condition ou comme matière des déterminations qu'il lui imposera? — Mais la pluralité est indéterminée, le nombre ne l'est pas. — C'est abuser de termes dont le sens n'est pas

suffisamment éclairci ; la pluralité sensible n'est indéterminée que pour l'entendement qui ne lui a pas encore imposé la mesure du nombre ; en elle-même, elle doit être définie, puisqu'elle existe. Etrange illusion que celle que nous avons à combattre ! L'esprit déterminerait la réalité en la concevant, et la nature ne pourrait la déterminer en la créant ! Faut-il donc rappeler que l'indétermination et l'existence s'excluent comme le nombre et l'infini ? — Vous mesurez, insisteront nos adversaires, l'œuvre de Dieu à notre chétive raison. — Nous en savons les bornes ; mais, si faible que soit sa portée, ce que nous savons de science certaine, c'est qu'une œuvre où régnerait la contradiction serait indigne de Dieu.

Et, en effet, la contradiction descend, inévitable, de la sphère de l'abstrait dans celle du concret et de la mathématique dans la nature, lorsqu'on essaye de se représenter un monde tel que le rêvent les partisans de l'infini. Qu'on imagine des parties en nombre infini dans chaque corps : tout déploiement fini d'activité sera la résultante d'un nombre infini de forces infinitésimales dispersées dans la substance de l'atome ; mais comment ces forces sans nombre parviendront-elles à créer un acte déterminé et précis ? Ce n'est pas tout. Autant de parties dans un corps, autant de groupes d'infinis, et ces infinis se multiplieront à mesure que l'on montera des groupements simples à des groupements plus complexes. Et, qu'on veuille bien le remarquer, il ne s'agit point ici de fiction mathématique ; nous sommes dans le réel, nous avons donc le droit de demander si les infinis dont on parle sont ou ne sont pas égaux en grandeur. Si l'on accepte la première hypothèse, on admet implicitement que la partie égale le tout, puisqu'on affirme que dans un corps quelconque la partie et le tout sont, au même titre, infinis ! Soutient-on au contraire que, selon les dimensions des parties, les infinis sont inégaux, on ne s'entend plus soi-même, — car ou le terme infini n'a pas de sens, — ou, dans le réel, il exclut rigoureusement le plus et le moins.

Ces considérations ont, au point de vue apodictique, une

valeur absolue : il en est d'autres qu'on peut utilement faire valoir, bien que moins rigoureuses, parce qu'elles sont plus voisines des faits. Si l'on pose en principe l'attraction moléculaire, il faut en conclure, d'après Poisson et Cauchy [1], qu'un corps composé de matière continue se comporterait comme un fluide, et qu'il serait plus analogue aux gaz qu'aux liquides pour la compressibilité. Ce serait même un fluide sans frottement intérieur, n'opposant aucune résistance, si petite qu'elle soit, au frottement de ses parties les unes sur les autres, un fluide enfin comme la nature n'en offre pas.

Dans un mémoire remarquable, M. de Saint-Venant insiste sur ces conséquences et s'attache à en démontrer l'absurdité. « Imaginons, dit-il, un corps continu ou composé d'une infinité de parties qui se touchent : l'arrangement actuel de ses points n'aura aucune stabilité; le plus petit déplacement en amenèra instantanément un autre..... Une foule de mouvements pourront y être continués sans résistance : ce seront, par exemple, tous ceux de glissement ou de torsion, dans lesquels chaque point ira remplacer identiquement un point semblable, exerçant les mêmes actions..... Le corps ne pourra même se tenir en équilibre qu'autant que la surface aura une forme déterminée, et cette forme sera nécessairement sphérique, si la matière dont il se compose est partout de même nature..... Ce n'est pas tout. La forme sphérique ne suffira pas à l'équilibre d'un pareil corps. Il faudra encore, pour que l'un quelconque de ses éléments soit également sollicité en tous sens par l'action des autres, que les couches sphériques concentriques aient différentes densités du centre à la surface..... La matière de ce corps doit donc être supposée susceptible de contraction et de dilatation (bien que le plus ou moins grand rapprochement des parties contiguës soit une chose difficile à concevoir [2]). La contraction n'aurait pas de limites si les parties ne faisaient que s'attirer; il faut donc

1. Voir Saint-Venant, *Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues*. Paris, 1844.

2. Cette hypothèse nous paraît même absolument contradictoire.

qu'elles se repoussent pour les plus petites valeurs des distances.

« Or, si l'on suppose la répulsion infinie quand la distance est nulle, le contact ne pourra exister, et une pareille matière se dissipera.

« Si la répulsion au contact est finie, le corps pourra bien prendre, au centre, une certaine densité qui résultera à la fois de la quantité totale de la matière, et des conditions de l'équilibre entre la répulsion des couches les plus voisines et l'attraction des couches les plus éloignées; mais, à la surface, la répulsion dominera et la densité devra être nulle.

« D'où il suit qu'un corps composé de matière continue ne serait qu'une sorte d'atmosphère s'étendant à l'infini par couches sphériques de densité décroissantes [1]. »

Conséquence singulière, mais qui résulte logiquement d'une hypothèse contradictoire dans les termes ! Ces corps, qu'on ne suppose continus, que parce qu'on cherche à sauver certaines de leurs propriétés physiques qu'on voudrait voir inaltérables comme la solidité et l'étendue, se résolvent finalement en « masses sans consistance, en nuages de matière subtile dans un état de changement perpétuel [2] ! »

Il est vrai que de semblables conclusions ne sont légitimes que dans l'hypothèse de l'attraction, qui implique l'action à distance; mais, s'il faut invoquer l'action à distance pour expliquer l'équilibre entre les éléments du fluide discontinu qui baigne les corps, pourquoi l'estimer impossible entre les molécules pondérables? La nature est une, elle n'a pas deux poids et deux mesures : ses lois sont générales.

D'ailleurs, est-on bien venu à rejeter ce mode d'action lorsqu'on adopte une opinion qui précisément le suppose? Comment les partisans de l'infiniment petit et du continu, réduits, pour rester d'accord avec eux-mêmes, à admettre partout l'impulsion au lieu de l'attraction, peuvent-ils expli-

1. Saint-Venant, même mémoire, *loc. cit.*, p. 5, 6, 7, 8.
2. *Id.*, *ibid.*

quer le phénomène élémentaire du choc? « Lorsqu'un atome est heurté par un autre, ils disent qu'il résiste au choc, non pas seulement par la force infinitésimale résidant au point de contact, mais comme si toute sa masse était concentrée en ce point. Or, de fait, cette concentration n'a pas lieu. Donc les parties éloignées du point de contact sont censées agir à distance sur ce point [1]. »

La communication du mouvement est également inexplicable sans l'action à distance qu'on entend proscrire. En effet, « si l'on considère la forme des atomes comme inaltérable, quand l'un d'eux vient d'être choqué, toutes ses parties doivent entrer à la fois en mouvement. La force impulsive, présente au seul point de contact, agit donc instantanément sur toutes les parties de l'atome. C'est bien là une action à distance. On ne peut pas répliquer que l'action se transmet de couche en couche; car, pour la transmission, il faudrait que la partie choquée prît d'abord un mouvement, le communiquât à la partie voisine, celle-ci à la suivante et ainsi de suite; or cette succession ne peut avoir lieu dans l'hypothèse du continu ou de la forme inaltérable, et à vrai dire, si l'on voulait parler d'une succession logique, il serait plus naturel de soutenir que c'est le point opposé à la partie choquée qui part le premier pour faire place aux suivants [2]. »

Il y a plus. Si les partisans de l'infini sont conséquents avec eux-mêmes, ils doivent admettre que le mouvement se propage à une distance infinie et entraîne un nombre infini de molécules ou d'atomes au même instant de la durée. Si cet instant est indivisible, le fait est inexplicable. S'il est, comme on l'affirmera sans doute, divisible lui-même à l'infini, le mystère vient compliquer le mystère, la contradiction, la contradiction. Il faudrait admettre alors que dans la durée,

1. Leray, *Constitution de la matière et ses mouvements*, Paris, 1869, Gauthier-Villars, p. 15.

2. Leray, *ibid.* — Secchi, *Unité des forces physiques* (518), n'est pas moins explicite : « S'il est facile d'affirmer la continuité de la matière, il est impossible de concilier cette hypothèse avec les phénomènes du mouvement. »

comme dans l'étendue, les parties plus ou moins grandes s'équivalent, c'est-à-dire, une fois de plus, que la partie égale le tout.

Quoi que l'on puisse penser de ces considérations physiques, dont la valeur relative est considérable, une chose est pour nous logiquement certaine, savoir l'impossibilité d'un nombre actuellement infini de parties dans la matière, ou, ce qui revient au même, la contradiction qu'une telle hypothèse implique pour l'entendement.

III

Il importe de reprendre haleine, de rappeler les étapes successives que nous venons de franchir, et de fixer avec précision le but que nous nous proposons d'atteindre.

Il a été établi, à l'aide du principe de contradiction et des faits eux-mêmes :

1° Que les corps sont discontinus et, par suite, soumis à la loi du nombre;

2° Qu'on ne peut leur attribuer un nombre indéfini d'éléments;

3° Que l'hypothèse d'un nombre actuellement infini de parties est également contradictoire.

La conclusion qui découle logiquement de ces prémisses est la suivante :

La matière ne peut être conçue sans parties, et le nombre de ses parties, bien que prodigieux sans doute et pour nous incalculable, ne peut être mentalement représenté que comme fini.

L'opinion qui résout les corps en parties toujours renaissantes bien que toujours moindres, n'est donc qu'une erreur, ou, pour parler la langue métaphorique de Bacon, une *idole*. Né des sens qui prêtent, contre toute raison, une apparente continuité à la matière, le préjugé de l'infiniment petit passe dans l'imagination, où il devient presque invincible. L'imagination, en effet, vouée à reproduire en le grossissant ou en

le réduisant le phénomène sensible, ne peut que répéter indéfiniment, dans un sens ou dans l'autre, l'illusion que celui-ci a causée.

La première vérité que nous nous proposions d'établir est donc maintenant acquise. Il est vrai que nous n'avons atteint le but que par une méthode d'*éliminations successives;* mais, nous l'avons fait déjà observer, dans tout problème dont l'objet est l'absolu, il est irrationnel de procéder autrement. La constitution intime de la matière ne sera jamais donnée en intuition; et, qui plus est, il serait contradictoire qu'elle le fût. Une seule voie nous restait ouverte, et nous l'avons suivie jusqu'au bout, celle qui exclut toute proposition contraire à l'axiome d'identité.

Reste à dégager de ce résultat les conséquences qu'il renferme.

Un premier corollaire est le suivant :

I. Si les éléments d'un *quantum* donné sont en nombre fini, ils ne peuvent plus, sans contradiction, se concevoir comme étendus.

La raison nous en paraît aussi simple que décisive. Si ces éléments, en effet, étaient étendus, ils seraient par cela même divisibles, et, s'ils étaient divisibles, ils ne seraient plus élémentaires, conséquence contraire à l'hypothèse.

On contestera sans doute qu'il soit toujours possible de diviser une particule étendue quelconque. Là est en effet le nœud du problème. Pour le mieux résoudre, prévenons toute équivoque et définissons les termes. Dans la langue du chimiste ou du physicien, divisible veut dire parfois : « ce qui est séparable à l'aide de procédés connus, ce qu'on peut mettre à part en usant des instruments et des moyens que la science nous livre ». Le mot atome, introduit depuis longtemps en philosophie, semble même n'avoir été créé que pour répondre à cette conception étroite de la pensée empirique : il signifie étymologiquement : « ce qu'on ne peut couper. » En fait, malgré la perfection relative de notre outillage, nous sommes incapables de pousser nos investigations au delà de

certaines limites. Il importe toutefois de remarquer que ce qui est « insécable » n'est pas nécessairement « indivisible ». Il peut se faire que des divisions que nos procédés n'atteignent pas soient très réelles, en d'autres termes, qu'il existe dans les corps des particules en nombre considérable, situées à jamais hors de nos prises. Mais allons plus loin : il est logiquement certain que les particules étendues qui par leur ténuité même nous échappent sont divisibles; aucune d'entre elles, en effet, ne peut être conçue comme élémentaire; que serait-ce qu'un élément qui occuperait une certaine portion de l'espace? Il aurait un haut, un bas, une droite, une gauche; les côtés, si rapprochés qu'on les suppose, ne se confondraient pas, et l'on pourrait toujours faire passer entre eux un plan de section; bref, dans l'élément ainsi défini, la raison découvrirait aussitôt tout un système de rapports, c'est-à-dire de divisions possibles, car, dans le réel, ce qui est distinct doit être séparable. Que ces relations de partie à partie échappent aux instruments les plus délicats, peu importe : elles existent, puisqu'on se place dans une hypothèse qui les implique : celle de l'étendue. — Mais, dites-vous, la cohésion qui les unit est invincible. — C'est possible, quoique vous n'en puissiez rien savoir : admettons néanmoins que votre opinion soit fondée; la cohésion que vous alléguez, si puissante qu'elle soit, se conçoit-elle sans des éléments cohérents? L'atome que vous déclarez insécable a donc toujours deux moitiés, quatre quarts, huit huitièmes, des parties en un mot, et, quelque division que vous lui fassiez subir par la pensée, il reste toujours divisible, si dans l'hypothèse il reste étendu.

« Les derniers éléments, dit Cauchy[1], d'accord en cela avec un grand nombre de savants et de philosophes, sont les véritables êtres simples dont la matière se compose, et ils n'ont pas d'étendue. Quoique cette assertion paraisse étrange au premier abord, elle est pourtant une conséquence immé-

1. Cauchy, *Sept leçons de physique générale*, p. 36 et 37.

diate et nécessaire des principes que nous avons établis.... En effet, tant qu'un morceau de matière conserve de l'étendue, il existe un plan horizontal qui serait propre à le diviser en deux parties, l'une inférieure, l'autre supérieure, dont les volumes seraient égaux, et ces deux moitiés sont bien distinctes l'une de l'autre, même avant que la division soit effectuée. Donc un morceau de matière renferme au moins deux êtres matériels distincts. Mais si chacune des moitiés conserve encore de l'étendue, elle renfermera pareillement au moins deux êtres matériels, et le morceau primitif au moins quatre, et ainsi de suite...

« Serait-il possible, ajoute l'illustre savant, que les derniers éléments des corps ne fussent pas simples ou que dans un morceau de matière l'on dût voir un composé qui n'aurait pas de composants ? Et, s'il existe des êtres matériels simples, n'est-il pas évident que chacun d'eux doit être sans étendue puisque tout être étendu est nécessairement divisible et composé en conséquence de parties diverses? »

On allègue d'ordinaire, pour éviter cette conclusion, que la divisibilité d'un corps est illimitée. Dans cette hypothèse, en effet, les parties ultimes fuiront toujours. Le plan de section qu'on propose séparera toujours en moitiés distinctes un système étendu quelconque, si petit qu'il soit; ces moitiés seront étendues elles-mêmes, et ainsi de suite à l'infini. Livrée à une interminable dichotomie, l'étendue diminuera sans cesse, mais ne disparaîtra jamais.

Une telle supposition, est-il besoin de le rappeler? n'est plus permise. Les démonstrations précédentes ont établi que, dans le réel, ni le nombre infini ni le nombre indéfini des parties ne se conçoivent : la somme des éléments d'un tout matériel est donc finie, et chacun des indivisibles qui la composent est nécessairement inétendu, sous peine de n'être pas élémentaire.

En un sens, il est vrai, l'hypothèse que nous combattons a sa raison d'être. — Qu'il existe un rapport défini en soi entre l'élément et le quantum où il entre, après les considérations

que nous venons de faire valoir, rien n'est moins douteux; il faut donc croire qu'un tel rapport est toujours, en soi, exprimable à l'aide d'une fraction dont l'unité dynamique serait le numérateur, et dont le dénominateur serait un nombre immense mais fixe, répondant pour chaque corps à la totalité des parties ultimes. L'œil de Dieu assurément peut lire une telle fraction, mais elle nous échappe. Ce qui est déterminé et même nombré dans la réalité des choses, demeure fatalement indéterminé pour nous. Lorsque de division en division nous poursuivons par la pensée l'unité finale, quel est le quotient qui répond à la grandeur évanouissante? — Nul ne le sait. — Nous ne trouvons en effet, à aucun moment de cette décomposition tout idéale, l'obstacle, le cran d'arrêt fixé *a priori* par la nature. Reconnaissons donc qu'au point de vue subjectif adopté de préférence par le géomètre, la divisibilité de l'atome doit sembler illimitée; elle l'est en effet, mais pour lui seulement, non en soi. L'indétermination qui règne dans notre pensée ne pénètre à aucun degré dans le monde réel.

Impuissante à se figurer un être simple, l'imagination élève doutes sur doutes, difficultés sur difficultés [1]. — Quoi!

1. Pascal dans son opuscule sur l'*Esprit géométrique*, et Euler dans ses *Lettres*, ont attaqué avec une extrême vivacité les partisans de la divisibilité limitée dans le réel.

Voici les principales objections de Pascal :

I. « Il suffit de dire à des esprits clairs en cette matière que deux néants d'étendue ne peuvent pas faire une étendue. Si l'on répond que deux unités font un nombre par leur assemblage, nous répondrons à notre tour que l'unité peut être considérée comme un nombre. »

Cette argumentation ne nous semble nullement satisfaisante. Admettons pour un moment que l'unité soit un nombre. Ce qui est certain, c'est que l'un et le multiple sont aussi opposés, comme notions, que l'inétendu et l'étendu; or l'un plusieurs fois répété produit le multiple. Pourquoi l'inétendu plusieurs fois répété ne produirait-il pas l'étendu?

II. Le rapport de l'inétendu à l'étendu est le même que celui du zéro au nombre.

Cette formule est équivoque, le zéro pouvant être conçu comme absolu ou comme relatif. L'unité, par exemple, ne saurait être conçue comme un zéro absolu; ce n'est qu'un zéro de multiplicité, un zéro relatif. Ainsi de l'élément simple. Il existe, on pourrait même établir qu'il existe seul dans la nature; ce n'est donc pas un zéro absolu, mais seulement un zéro relatif, un zéro d'étendue.

III. Deux indivisibles, s'ils se touchent, se confondent.

C'est là une solution toute géométrique. Mais le réel ne dépend pas de

deux inétendus produiraient un étendu ! — Sans doute, si, comme tout nous porte à le croire, l'étendue n'est qu'un rapport; un rapport implique au moins deux termes; un système composé, deux indivisibles. — Deux riens sont donc quelque chose! Toujours et nécessairement, lorsqu'il s'agit des riens dont vous parlez et que l'on pourrait appeler *relatifs*; l'élément, comme tel, ne saurait être de la nature du com-

l'idéal : au contraire. Deux indivisibles, s'ils sont impénétrables l'un à l'autre, peuvent se toucher sans se confondre.

IV. Dans le carré, la diagonale est incommensurable avec le côté. Peut-on dire quel nombre d'indivisibles existe dans l'une et dans l'autre ligne?

Non, sans doute; mais qu'importe? La question n'est pas là. Il existe, disons-nous, de part et d'autre, soit dans la diagonale, soit dans le côté, un certain nombre d'indivisibles; nous ne prétendons pas le connaître. Allons plus loin. La difficulté qu'on nous propose peut se convertir en argument favorable. Si la diagonale est incommensurable avec le côté, c'est qu'aucune longueur, si petite qu'on la suppose, n'est contenue un nombre exact de fois dans la diagonale et dans le côté. Qu'en conclure, sinon que les éléments de ces deux lignes ne sauraient être des longueurs?

Nous reviendrons sur ce problème des incommensurables, l'un des plus intéressants au point de vue qui nous occupe.

V. Combien faut-il d'indivisibles pour obtenir une longueur donnée?

Un nombre déterminé en soi indéterminé pour l'entendement : n dans la réalité, x pour l'esprit. De là ces divisions sans fin, dans l'abstrait, dans l'idéal.

Voici maintenant quelques-unes des objections d'Euler :

I. Dans le système de la divisibilité à l'infini, ce mot de dernières particules m'est absolument incompréhensible.

Rien de plus naturel : mais la question est de savoir si le système dont vous parlez, légitime dans l'abstrait ou dans l'indéterminé, est également rationnel dans le déterminé et le concret.

II. « Nos adversaires appellent monades les particules auxquelles on parvient, dans la division des corps, après qu'on aura continué cette division à l'infini; mais il me semble que c'est autant comme si l'on disait : après qu'on aura achevé une division qui ne finit jamais. »

L'objection est irréfutable, mais elle ne vaut que contre Leibniz et les partisans de la pluralité actuellement infinie dans le réel.

III. Plusieurs points géométriques ne peuvent produire une ligne : plusieurs indivisibles ne produiront pas davantage une grandeur réelle.

C'est confondre la géométrie avec la nature, l'abstrait avec le concret. Rien n'autorise à passer d'un tel principe à une telle conséquence.

IV. Quelle différence établira-t-on entre les esprits et les monades?

Comme unités, tous les êtres se ressemblent nécessairement. Un être doit être un ou n'être pas; *Ens et unum convertuntur*. Mais les attributs peuvent différer; toute différence sera naturellement intensive, au point de vue où nous nous plaçons. C'est ce qu'admettent d'une façon plus ou moins explicite tous les partisans de la doctrine évolutioniste d'Aristote et de Leibniz.

posé : une armée ne se résout pas en armées, un bataillon en bataillons, un nombre en nombres. — Mais un élément, quel qu'il soit, occupe une portion de l'espace et est divisible comme la portion d'espace qu'il occupe, c'est-à-dire à l'infini. — Votre objection tombe d'elle-même, si l'élément en question n'occupe *qu'un point*, le point étant, comme l'unité dynamique, une *limite*. D'ailleurs vous n'avez pas le droit de régler le réel sur le possible et de faire dépendre la matière de l'étendue. C'est l'étendue, on le montrera, qui doit se plier aux exigences de la matière. — Un être inétendu est inconcevable. — Dites inimaginable, ce qui est fort différent. On n'imagine jamais que ce qu'on a vu ; or nous ne voyons que des collections qui, comme telles, sont étendues. De là, pour l'imagination déconcertée, une association invincible et fatalement trompeuse.

A la vérité, le terme inétendu est un terme négatif et une négation ne peut constituer un être. Quelle est donc la nature propre ou l'essence de l'élément? C'est ce que nous allons maintenant rechercher.

Nous partirons d'un fait, celui de l'impénétrabilité physique. Personne ne le conteste, et les divergences ne commencent qu'au moment où il s'agit d'en fixer le sens et d'en préciser la cause. Prenons donc le fait pour ce qu'il est et pour ce qu'il vaut ; il nous sera aisé d'établir, comme conséquence de la thèse générale, la vérité d'un second corollaire qu'exprime la proposition suivante :

II. La faculté de réagir réside dans les éléments et dans les éléments seuls.

Un corps susceptible de réaction doit l'être, en effet, ou par ses éléments ou par ses interstices. Or les interstices ne sont que des vides, et, ne pouvant résister, ne peuvent en aucune façon suggérer l'idée de l'impénétrabilité physique. Cette idée a donc sa raison d'être dans les éléments et dans les seuls éléments.

Reste à savoir comment il convient d'interpréter une pareille conclusion. Faut-il admettre, entre les éléments distincts et

séparés les uns des autres, un pouvoir de répulsion qui, devenant infini au contact, les empêcherait de coïncider? — Ce serait compliquer le problème, sans le résoudre, et multiplier inutilement le nombre des moyens. Que serait-ce que ces puissances occultes tendues entre les unités intégrantes? — De pures virtualités logiques? — Mais de telles virtualités n'existent ni n'agissent. On ne les introduirait dans le monde réel qu'en exhumant les vaines entités de l'école. — Des êtres véritables? — Il est plus simple alors et plus conforme au principe d'économie, de faire des éléments eux-mêmes des forces ou des centres de force : *Frustra fit per plura, quod fieri potest per pauciora.*

Qu'est-ce qu'une Force? Ce terme, indispensable au savant comme au métaphysicien, est malheureusement des plus vagues; c'est que, au lieu d'être définie en elle-même, la Force ne l'est presque jamais que par ses effets.

Quantité intensive, elle est néanmoins figurée, en mécanique, à l'aide de symboles étendus et spécialement de lignes. Ces lignes, on le conçoit, représentent plutôt l'effet que la cause, le mouvement possible plutôt que la source du mouvement. Elles ont des longueurs et des directions différentes, selon la durée et le sens du mouvement qu'on suppose emmagasiné à l'état virtuel dans une cause x, qui seule mériterait le nom de Force.

Dans les sciences expérimentales, la Force se définit d'ordinaire par la pression ou la traction, toujours mesurables à l'aide du poids. Mais une telle définition ne saurait satisfaire le philosophe : la pression n'est que l'action de la Force devenue sensible; la traction, qu'un mode particulier du mouvement, c'est-à-dire de la Force manifestée dans l'espace. Qu'au point de vue spécial du savant ces fictions soient utiles, nécessaires même, on ne le nie pas : la science ne devient exacte que lorsqu'elle devient quantitative, et elle ne devient quantitative que par la mesure, qui implique l'étendue. Le physicien devra donc s'attacher de préférence aux manifestations de la Force. La Force dans sa nature intime, la Force *nou-*

mène, échappant à toute condition d'espace, ne lui serait d'aucun secours.

C'est cependant la Force ainsi conçue que nous devons chercher à définir, ne fût-ce qu'en la distinguant de tout ce qui n'est pas elle. Est-ce une cause? Dans l'usage vulgaire, ce terme est lui-même bien vague; la cause est parfois un agent véritable, parfois une raison abstraite. On dit que la pesanteur est cause de la chute des corps; or la Pesanteur n'est point un être réel. Au contraire, un corps en met un autre en mouvement : ici, la cause est un agent concret, une vivante et substantielle énergie.

Ce dernier sens est celui qui répond le mieux à l'idée que nous nous faisons de la Force. Les lois physiques, analogues à la loi de pesanteur, ne sont, en dernière analyse, que des modes d'action. La Force véritable, c'est l'action dans son principe, l'action à sa source vive. Autant de forces distinctes dans la nature, autant d'agents réels, ou, au sens le plus large du mot, d'individus.

La Force n'est donc point, ainsi que le suppose le vulgaire, un attribut; c'est une substance véritable, c'est la réalité même, cachée sous des apparences indéfiniment variées.

Leibniz, le premier, a senti et cherché à faire comprendre toute l'importance de cette notion, empruntée à la conscience que nous avons d'agir spontanément et de nous déterminer nous-mêmes. La Force, à ses yeux, n'est point une virtualité morte : elle enveloppe l'effort. Qu'aurait-elle besoin, pour agir, d'un stimulant étranger? Elle est à elle-même son propre ressort, « instar arcûs tensi qui non indiget stimulo alieno, sed sola sublatione impedimenti. » Remarquable conception qui nous place au cœur même de la réalité et nous ouvre un jour sur l'absolu !

L'imagination ne saurait s'élever à ces hauteurs; de la Force elle ne connaît que les apparences phénoménales : elle l'assimile donc à un phénomène, et l'attache à une substance inerte, destinée à lui servir de substratum ou de point d'appui. Pour elle, il n'existe au monde que des réalités mortes

attelées de forces abstraites [1]. Fragile édifice que la raison renverse en le touchant ! Le prétendu point d'appui résiste ; mais, s'il résiste, c'est lui-même une force ou un système de forces ; s'il ne résiste pas, ce n'est que l'ombre d'un être, une chimère, l'illusion d'un rêve.

Ne disons donc pas que les éléments ultimes sont des substances douées de forces : Les Forces seules existent ; leurs vivantes énergies constituent et remplissent l'univers.

A la lumière de cette théorie qu'ont adoptée, outre Leibniz et le dynamisme qui a hérité de sa pensée, des savants comme Ampère, Faraday, Tyndall [2], les problèmes cosmologiques s'éclairent et les solutions se simplifient. Partout, dans la nature, qu'elle agisse ou non à distance, l'existence de la Force est constatée. C'est elle qui, visible au travers de ses modes d'action, présente dans les lois qui l'expriment et font sentir son influence aux extrémités de l'espace, appelle les corps vers certains centres, propage au moyen de vibrations, le son dans l'air ; la lumière, l'électricité, la chaleur peut-être, dans un fluide plus rapide et plus subtil ; la physique moléculaire la surprend à l'œuvre dans la cohésion, d'invincibles affinités font pressentir, en chimie, sa toute-puissance ; vivante dans le végétal, sensible dans l'être animé, elle rayonne avec la pensée dans l'homme.

Nul événement ne lui échappe. Le mécanisme contemporain, préoccupé de ramener au mouvement, comme les espèces au genre, les divers groupes de phénomènes naturels, travaille, qu'il le sache ou non, pour elle, et prépare en mé-

1. Telle est l'hypothèse de Buchner, de Moleschott et d'un certain nombre de matérialistes contemporains.

2. Voir deux conférences de M. Tyndall, l'une sur la matière et la Force, l'autre sur la Force, traduites de l'anglais par l'abbé Moigno. — Avant Tyndall, Faraday s'était exprimé, au sujet de la Force, en termes d'une précision qui ne laisse rien à désirer : « Que savons-nous de l'atome, dit-il, en dehors de la force? Vous imaginez un noyau qu'on peut appeler *a* et vous l'environnez de forces qu'on peut appeler *m*; pour mon esprit votre noyau *a* s'évanouit, et la substance consiste dans l'énergie de *m*. En effet quelle idée pouvons-nous nous former du noyau indépendamment de son énergie? A quoi rattacher l'imagination d'un *a* indépendant des forces connues? »

taphysique son règne incontesté. Quelle serait en effet la raison dernière du mouvement, sinon la Force? La Force explique même le repos, si, comme tout le fait pressentir, le repos n'est qu'un état d'équilibre; la loi d'inertie, plus active qu'on ne l'imagine d'ordinaire, puisqu'elle éterniserait le mouvement, trouve en elle son principe efficace et son explication définitive[1].

Entre la Force et les phénomènes qui la manifestent, on peut admettre, il est vrai, l'existence d'intermédiaires plus ou moins nombreux. Ces intermédiaires ont leur utilité dans la science, car la connaissance du moteur n'exclut pas celle du mécanisme qu'il met en jeu. — De tout temps, deux tendances également nécessaires, bien que divergentes, se sont produites en philosophie; elles se disputent pied à pied le terrain, acharnées à se détruire, bien qu'elles doivent exister ensemble, pour nous rendre sensibles les deux aspects d'une même réalité. Tantôt la pensée humaine s'attache à l'absolu et poursuit dans l'être la Force qui en est l'âme même; tantôt elle se retourne vers le relatif, observe le phénomène, et étudie les instruments auxquels la Force s'applique. L'un des deux points de vue vient, à son heure, corriger et compléter l'autre, si bien que d'approximations en approximations, nous nous faisons une idée de moins en moins imparfaite des choses. Pour ne rappeler que l'époque moderne, le Cartésianisme, plus vaste encore que profond, reste souvent à la surface; il ne veut voir dans le monde que l'étendue et le mouvement. Avec Leibniz, tout change de face; l'idée de Force entre en scène

1. On sait quelle curieuse évolution a peu à peu amené MM. A. Bain et H. Spencer à restaurer l'idée de l'activité du *moi* compromise par l'empirisme. En Angleterre, par un progrès analogue, la notion de Force tend de plus en plus à s'imposer à la science. Nous venons de citer Faraday et Tyndall. — Dans un article de la plus haute importance qu'a récemment publié la *Quarterly Review* (fév. 1880), et que résume la *Revue des cours scient.* (17 avril 1880), M. Carpenter renonce avec éclat aux idées exposées dans la première édition de son *Traité de physiologie*, et cherche à établir, non seulement que la Force est partout dans la Nature, mais encore que nous en avons une *expérience directe*. Cette intéressante démonstration vaut à la fois par les faits sur lesquels elle s'appuie et par les autorités qu'elle cite, celles, entre autres, de H. Spencer et de sir J. Herschell.

et joue peu à peu un rôle prépondérant; elle s'impose à la science même, en même temps que l'action à distance admise par les partisans de Newton. — De récentes hypothèses nous ramènent aujourd'hui au mécanisme : c'est que des faits nouveaux ont apparu, c'est aussi qu'on a creusé à de nouvelles profondeurs. Nous ne croyons plus aux rayons directs; nous attribuons l'impression lumineuse à des ondes successivement condensées et dilatées. Une théorie analogue explique la chaleur. L'éther est devenu le véhicule obligé de nos plus importantes sensations; la loi d'attraction elle-même semble pouvoir s'expliquer par les pressions qu'exerce ce fluide impondéré [1]. Ne croyons pas toutefois que cette conception nouvelle nous livre le dernier mot. Le dynamisme a déjà fait ses réserves au nom des exigences de l'entendement. Les atomes du fluide subtil vibrent sans cesse; quelle est la cause de ces vibrations? — L'élasticité qu'ils possèdent? — mais qu'est-ce que l'élasticité sans la Force [2] ? D'ailleurs on demandera d'où vient l'impulsion première. — Les mêmes atomes se maintiennent en équilibre à distance les uns des autres, tout mouvement étant impossible dans le plein : — d'où résulte l'équilibre, sinon de forces neutralisées? — Croit-on que la cohésion physique et l'affinité chimique puissent s'expliquer comme la pesanteur par des pressions? — Soit; mais alors quel ressort a condensé l'onde d'éther qui vient presser les molécules pondérables? Partout d'importants *desiderata ;* partout le besoin d'un moteur, la nécessité de la *chiquenaude*. Que dis-je? les instruments que la Force emploie ne sauraient avoir, en dehors d'elle, de réalité véritable; la chiquenaude serait sans action sur des atomes qui seraient sans ressort. Si l'énergie pénètre les intermédiaires dont elle use au point de constituer leur essence, ces intermédiaires ne sont plus, à proprement parler, que ses manifestations.

1. Voir Saigey, *Physique moderne;* Secchi, *Unité des forces physiques;* de Boucheporn, *Principe général de la philosophie naturelle.*

2. Secchi explique les phénomènes d'élasticité à l'aide d'atomes en rotation : la difficulté recule, mais subsiste. Comment expliquer la rotation des atomes?

Nous touchons au terme de l'étude que nous avions entreprise sur la matière. Recueillons les résultats obtenus :

1° La matière est divisible.

2° L'entendement la conçoit nécessairement comme divisée en un nombre déterminé de parties.

3° Ces parties ne peuvent être qu'inétendues.

4° Ce sont des forces ou des centres de forces.

Si cette analyse est complète, une rapide synthèse nous permettra de la vérifier. C'est là une sorte d'*inversio experimenti* indispensable.

Le dernier terme dans la division des parties doit être le premier dans la reconstruction du tout. Prenons donc pour point de départ l'élément dynamique, et, sans avoir la prétention excessive de recréer la matière de toutes pièces, essayons de montrer que les diverses combinaisons possibles d'un tel élément suffisent à nous faire concevoir des corps analogues à ceux qui nous sont donnés en intuition.

I. L'élément dynamique est inétendu, parce qu'il est indivisible. Ce n'est point, à nos yeux, une unité abstraite, une unité vide, mais bien une unité de force toujours en acte.

Il ne peut être conçu que comme *impénétrable*, car, si un autre élément de même nature pouvait, en même temps que lui, occuper le même point de l'espace, sa réaction serait donc nulle, ce qui est contraire à la définition de la force.

II. Deux éléments dynamiques, même contigus, ne sauraient coïncider, car s'ils coïncidaient, c'est qu'ils se seraient pénétrés, ce qui, d'après la proposition précédente, est impossible.

III. Ne coïncidant pas, ils doivent donner naissance à un premier couple, c'est-à-dire à un premier système divisible, partant étendu.

L'atome étendu existe ; poursuivons :

IV. A des groupements d'atomes répondront des composés d'ordre supérieur nommés molécules.

V. On peut supposer que les systèmes moléculaires sont plus pressés ou plus denses dans les solides que dans les

liquides, et dans les liquides que dans les gaz. La dissociation chimique créerait de nouveaux degrés de raréfaction [1].

VI. Entre les molécules que séparent les unes des autres, nous le savons, des intervalles appelés pores [2], circulerait ce fluide impondéré qu'on est convenu de nommer éther. Il ne serait nullement nécessaire d'imaginer qu'il fût d'une autre nature que les molécules pondérables : on peut se le représenter comme composé d'éléments dynamiques qui, maintenus à l'état de dispersion et incapables de s'agglomérer en atomes, seraient aux molécules déjà formées dans le rapport de l'inétendu à l'étendu [3].

C'est ainsi qu'on expliquerait scientifiquement la distinction de tout temps établie par les philosophes et par le vulgaire

1. Voir Secchi, *Unité des forces physiques*, 2e édition, p. 516, 517, 518. « Quand intervient ce mode de division, dit le savant physicien, l'esprit se refuse à concevoir à quel degré de rareté la matière peut atteindre. Il n'est pas étonnant que des écoles philosophiques aient regardé la matière comme constituée par une série de systèmes particulaires de plus en plus simples, autrement dit, de fluides successivement plus atténués, sans qu'on puisse assigner de terme empirique à leur atténuation. » — « Ce n'est là toutefois qu'une illusion, ajoute-t-il, car s'il est facile d'affirmer la continuité de la matière, il est *impossible* de concilier cette hypothèse avec les phénomènes du mouvement. » *Op. citat.*, p. 518.

2. Quelques physiciens, comparant la densité de l'eau à celle du platine écroui, conclurent que dans l'eau le rapport du vide au plein devait être de 22 à 1. Dans ces derniers temps, les travaux de Hirn sur la chaleur l'ont conduit à admettre que la valeur de ce rapport était de 10 à 1. D'après Secchi, *op. cit.*, on ne possède encore aucune donnée absolument certaine sur ce point (p. 517).

3. « L'étude de la lumière et de l'électricité nous a conduits à regarder comme probable cette proposition, que l'éther n'est autre que la matière elle-même parvenue au plus haut degré de ténuité. Par suite, tous les corps ne seraient en réalité que des agrégats, des atomes même de ce fluide. » (Secchi, *op. cit.*, p. 519.)

On conçoit que, si l'atome est formé d'un nombre entier d'éléments, son poids soit un multiple entier de l'élément primitif. En d'autres termes, si l'on représente par 1 le poids de l'élément primitif, les poids moléculaires de tous les corps simples ou composés seront représentés par des nombres entiers. Le corps inconnu dont les éléments devraient être désignés par l'unité existe-t-il? Ce n'est certainement pas l'hydrogène, quoi qu'ait pu en penser le chimiste Prout ; mais on peut admettre sans invraisemblance que c'est un corps dont l'équivalent serait 2, 3, 5n fois moindre, l'éther par exemple. Moigno, Secchi, et, en Angleterre, Lockhyer accordent à cette hypothèse, même au point de vue expérimental, un haut degré de probabilité.

lui-même entre la matière subtile et la matière grossière [1].

VII. Les vibrations du fluide intermoléculaire expliqueraient, non plus la sensation de résistance continue, due à des groupements complexes et susceptibles d'être perçus par le tact, mais les sensations spéciales et plus subtiles de couleur, de son, de température, etc., etc. Ainsi le contact des particules réunies en systèmes permettrait de concevoir les propriétés qu'on nomme essentielles ou premières dans les corps [2]; au contraire, l'impression produite par les éléments inétendus sur des organes plus délicats, donnerait l'idée de ses propriétés accidentelles ou secondes.

Dès lors, en vertu de la loi intérieure qui nous détermine à projeter au dehors nos sensations, l'étendue, d'abord résistante, deviendrait pour nous chaude ou froide, colorée ou sombre : — illusion utile, — puisque nous ne pouvons développer notre être qu'en nous recherchant nous-mêmes dans les choses; mais aussi illusion fatale — et en dehors des spéculations rationnelles, absolument invincible. Le sens renverse donc la réalité, et l'imagination, qui le continue, continue l'erreur.

VIII. Après les propriétés sensibles, les propriétés physiques et chimiques :

1. Une explication analogue, mais à certains égards contestable, est proposée par l'auteur des *Conséquences de la thermodynamique*. M. Hirn ramène la matière subtile à la force, qu'il définit, après Poisson (*Mécan.*, t. I, p. 2), « une cause quelconque qui met la matière en mouvement ou qui tend à la mouvoir, lorsque son effet est suspendu ou empêché par une autre cause. » — « La force, ajoute-t-il, n'est ni un être de raison ni une qualité de la matière. Elle existe au même titre qu'elle. C'est un principe spécial et constituant de l'univers. » — Les atomes, au contraire, seraient des éléments étendus d'un volume inaltérable. Nous ne saurions accepter cette seconde proposition : ce qui est étendu nous paraît nécessairement divisible. D'ailleurs il est malaisé de concevoir ces forces traits d'union qui groupent entre eux les atomes.

L'hypothèse de M. X. Kretz, hypothèse exposée dans un opuscule qui a pour titre *Matière et éther*, ne paraît pas différer sensiblement de la précédente. Voir *Revue scientif.* des 15 janvier, 11 et 18 mars 1876.

2. Des particules solides ou liquides semblent généralement indispensables à la sensation de tact : des particules seulement liquides à la saveur, fluides ou gazeuses à l'odeur et au son, éthérées à la température et à la couleur. La distinction ne serait donc pas tout à fait aussi tranchée que nous l'indiquons.

Dans l'hypothèse de l'atome inaltérable, la pesanteur ne s'explique que difficilement [1]. Si au contraire on admet l'existence de centres de forces, la pesanteur « sera l'attraction mutuelle, en raison inverse du carré de la distance, d'une monade dynamique du globe terrestre, sur une monade dynamique du globe qui gravite vers la terre [2]. »

Le poids s'expliquerait plutôt « par l'ensemble des attractions partielles de tous les centres de forces sur les centres de forces du corps [3]. »

La masse se concevrait nettement et pourrait se définir : « l'ensemble des éléments dynamiques qui composent un corps [4]. »

Quant à la densité, ce serait « le rapport entre les nombres de centres de forces renfermés dans des volumes égaux du corps donné et du corps particulier pris pour terme de comparaison [5]. »

Enfin la cohésion et l'affinité ne régiraient que les atomes pondérables ; l'élément impondéré du fluide subtil, animé de vitesses prodigieuses, échapperait à leurs lois.

Le cadre que nous nous sommes tracé ne nous permettait qu'une rapide esquisse. La conclusion générale qui se dégage des considérations précédentes, c'est que, pour la raison, le monde n'est et ne peut être qu'un système de forces dont le

1. Moigno, *Essence de la matière*, p. 43, fait observer que la force qui fait tomber dans le vide un atome continu ne saurait être le poids de la moitié, du quart, du millionième de cet atome, puisque cette moitié, ce quart, ce millionième, supposés un instant séparés, tombent dans le même temps et avec la même vitesse.

2. Moigno (*op. cit.*, p. 43) remarque également avec beaucoup de pénétration que, si l'on admet l'explication de la pesanteur qu'il propose, on doit admettre en même temps l'identité absolue des centres de forces, tous les corps, si différents qu'ils soient, tombant avec une égale vitesse dans le vide.

3. Moigno, *op. cit.*, p. 43.

4. Rien de plus vague que la définition suivante de la masse : « C'est la quantité réelle de matière que possède un corps. » Qu'est-ce qu'une pareille quantité ? Est-elle continue ou discontinue ? — Une définition précise, mais toute relative, est celle-ci : « La masse est égale au rapport du nombre abstrait qui exprime le poids de ce corps, à celui qui représente l'accélération de la pesanteur. »

5. Moigno, *ibid.*

nombre, incalculable pour nous, est déterminé en soi. Mais comment se le figurer ainsi? On ne l'essayera même pas, si l'on tient pour certaine la doctrine qui d'Aristote à Kant a rallié les esprits les plus profonds : Bacon, Descartes, Newton, Berkeley et tant d'autres. Ce n'est que l'apparence qu'on se figure : l'être en soi défie toute représentation. Pourquoi s'en plaindre, si nous parvenons à en obtenir quelque connaissance, en le déduisant, à titre de conclusion logique, de prémisses rationnelles? Lorsque du phénomène total, où il entre comme facteur, l'esprit a tenté d'éliminer ses exigences subjectives, pour dégager le facteur étranger qu'il veut connaître, il est déraisonnable de lui demander que le phénomène subsiste. Toute raison première, toute explication d'une portée absolue échappera toujours à l'imagination. La couleur se représente, non l'élément qui ondule; l'étendue, non les indivisibles dont les relations la constituent; l'impénétrabilité, non la Force. *La Force est ce qui reste nécessairement du phénomène total de la résistance, lorsque, par un suprême effort de la raison, le facteur personnel en a distrait l'apport de sa propre énergie*[1]. Il importe peu que nous en ayons l'intuition; il suffit que nous devions affirmer son existence comme l'indispensable élément d'un tout donné.

Abordons maintenant, au même point de vue, celui de la divisibilité, l'étude des quantités analogues à la matière.

1. Dans une remarquable étude sur le caractère relatif de la connaissance, M. Janet propose un *criterium* semblable pour dégager l'élément *objectif* de la représentation qui l'enveloppe : « Tout ce que je puis concevoir comme existant sans que je sois là, dit-il, je l'appelle *objet;* tout ce que je ne puis concevoir qu'à la condition que j'y sois moi-même, je l'appelle *sujet*, et dans l'acte de la connaissance les deux choses sont si intimement confondues que le partage en est très difficile et que peut-être la limitation absolue n'en sera jamais donnée; peut-être sur les confins tiraillerons-nous toujours du côté du sujet et du côté de l'objet; mais cependant il y a toute une zone plus ou moins indéterminée dont je conçois très bien la possibilité extérieure. » *Revue cours litt.*, 3e année, n° 45. — Voir également *Matérialisme contemporain,* p. 35-47. — En fait, ce que nous éliminons par la pensée lorsque nous nous supposons *absent*, ce sont des *exigences subjectives*, exigences que peut toujours nous révéler, avec plus ou moins de précision, l'observation directe de la conscience.

CHAPITRE II

L'IDOLE DE L'INFINIMENT PETIT ET LES QUANTITÉS ANALOGUES A LA MATIÈRE

Trois quantités considérées en elles-mêmes et objectivement sont analogues à la matière : le lieu, la durée, le mouvement.

a. Le lieu en soi.

Exigences objectives qui déterminent sa définition. Il dépend de l'agrégat matériel qui l'occupe, autant que de l'esprit qui le pense.

En conséquence :

1° Ses éléments ultimes ne peuvent être conçus que comme inétendus, car ils doivent servir de points d'attache aux éléments dynamiques de la matière. — Conséquences absurdes de l'hypothèse opposée.

2° De plus, ils doivent être contigus, le vide d'espace étant inintelligible. — Pourquoi une semblable nécessité ne s'impose point aux éléments dynamiques de la matière. — Distinction essentielle entre la contiguïté et la continuité.

Définition du lieu en soi.

Il contient et doit contenir autant d'éléments adynamiques que le corps qui l'occupe contiendrait d'éléments dynamiques s'il était plein.

Les points, les lignes, les surfaces doivent être dans la nature en nombre donné, mais toute loi de génération nous échappe, nous ne connaissons que les éléments générateurs.

Origine du concept géométrique de l'étendue. — Impossibilité d'expliquer avec ce concept : 1° le mouvement ; 2° la rencontre d'un corps par un autre corps animé d'une vitesse supérieure et se mouvant dans la même direction. — Discussion du problème de l'Achille. — Le problème véritable presque toujours éludé.

L'antinomie prétendue n'existe qu'entre le lieu *noumène* et le lieu *phénomène* ou géométrique.

b. La durée en soi.

La durée en soi doit se résoudre en instants. — Origine du concept phénoménal de la durée. — La conscience, comme les sens, ne nous montre que des composés. — Analogies que présentent la durée en soi et le lieu en soi.

c. Le mouvement en soi.

Existe-t-il un mouvement absolu? Opinion de Herbert Spencer. — Critique

La matière mise à part, il n'existe pour nous d'autres quantités, en dehors du nombre qui les mesure toutes, que l'étendue, la durée et le mouvement. Extraites de la réalité sensible, ces quantités ont-elles conservé quelque valeur objective, ou faut-il croire qu'elles ne relèvent plus que des lois objectives de la raison qui les créerait en les concevant ?

Nous avons déjà fait observer que les abstractions qu'opère l'entendement ne sont pas toutes du même ordre. Lorsque, du composé réel, il détache l'un de ses éléments, c'est pour l'étudier, tantôt dans ses rapports avec les autres facteurs de ce composé, tantôt au seul point de vue de ses exigences subjectives et des lois qui lui sont propres. Ainsi l'étendue et la durée, abstraites de la matière divisible et des phénomènes successifs, ne le sont pas toujours sans certaines conditions, sans certaines réserves expressément spécifiées. On convient qu'il s'agit *de tel lieu, de telle durée, avec les déterminations qui les caractérisent dans l'existence*, et que, dans l'hypothèse où l'on se place, on n'est plus libre de supprimer. Au contraire, l'esprit peut, s'élevant à un plus haut degré d'abstraction, ne rechercher dans l'étude de quantités précédentes que lui-même et le mouvement logique de sa pensée, comme

le musicien qui souvent n'adopte un thème que pour se livrer en le développant à sa propre inspiration [1].

Dans le premier cas, la grandeur conserve évidemment quelque chose d'objectif; on pourrait l'appeler concrète, ou mieux encore mixte, si l'on tient à la distinguer de la matière ; dans le second, elle demeure, au sens rigoureux du mot, abstraite ou purement intelligible.

C'est à titre de grandeurs objectives que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre l'étendue, la durée et le mouvement. Il s'agit de rechercher si ces quantités ainsi conçues admettent ou rejettent la divisibilité à l'infini. Nous consacrerons une analyse spéciale à chacune d'elles.

I

Le lieu en soi ou le lieu réel.

Le lieu réel d'un corps est, pour nous, la portion de l'espace que ce corps occupe : il ne saurait être absolument détaché, même par la pensée, du *quantum* matériel dont il marque exactement la trace et dont il est le réceptacle; autrement, il se confondrait avec l'étendue idéale ou intelligible qui n'est qu'un pur concept de l'entendement.

Le lieu que nous appelons *réel* est donc le lieu dans lequel se meuvent ou peuvent se mouvoir nos membres; la distance que nous franchissons ou que nous pouvons franchir lorsque nous nous rendons d'une rue, d'une ville, d'une région à une autre; l'espace enfin que traversent dans leur marche mesurée et régulière les globes qui peuplent le ciel.

1. L'*idéalisme subjectif* peut-il rendre compte de ces deux modes d'exercice de l'intelligence? — Si l'esprit obéit à une loi intérieure, il doit, avec la conscience qu'il a de ses actes, voir se développer la série de ses phénomènes sous la forme d'un progrès logique et continu. — Comment expliquer alors, outre l'imprévu de ces événements extérieurs qui sont pour lui, à l'origine, autant de surprises, la nécessité qu'il subit toutes les fois qu'il sacrifie ses propres exigences à celles de la chose en soi? Là où se montrent deux lois contradictoires, il paraît impossible de maintenir l'unité de nature; un sujet qui s'oppose à lui-même, doit se résoudre en *sujet* et en *objet*.

Qu'ainsi conçu et défini, le lieu ait une sorte d'existence en dehors de la pensée, il semble impossible d'en douter. « Comment admettre, dit un philosophe peu suspect de partialité en faveur de la doctrine du discontinu et du fini [1], que les phénomènes astronomiques, si manifestement indépendants des lois ou des formes de l'intelligence humaine, viendraient se coordonner d'une manière simple et régulière, en un système qui ne signifierait pourtant rien hors de l'esprit, parce que la clef de voûte de ce système serait un fait intellectuel, humain, mal à propos transporté dans le monde où s'accomplissent les phénomènes astronomiques ? Ce qui se dirait des phénomènes astronomiques pourrait se dire de tous ceux que la science a ramenés à des lois régulières, simples, et qui paraissent tenir de très près, en raison de cette simplicité même, aux lois primordiales de la pensée. »

Le lieu réel n'est ni une abstraction pure, puisqu'il est le décalque exact des corps qui l'occupent, ni une forme *à priori* de l'intuition sensible. Faire cette seconde hypothèse, ce n'est pas seulement méconnaître les traits de ressemblance frappants qui établissent la parenté du lieu avec le composé matériel, c'est se refuser à l'observation d'un fait psychique parfaitement certain, celui du progrès continu qui d'étapes en étapes nous emporte du réel vers l'idéal; c'est suspendre dans le vide une de ces formes qu'on nomme bien à tort intelligibles, puisqu'elles ne trouvent de point d'appui rationnel ni dans les choses ni dans la pensée [2]. Le lieu est une grandeur objective. Il n'existe pour l'esprit que dans et par le *quantum* étendu et matériel d'où il l'extrait. En conséquence, loin de pouvoir imposer sa loi au corps, il doit la recevoir de lui et n'en pas connaître d'autre, réserve faite de l'existence substantielle. A ce point de vue, le lieu, non moins que le corps lui-même, se conçoit comme nécessaire-

1. Cournot, *Essais sur les fondements de nos connaissances*, t. I, ch. X, p. 306.

2. Nul point d'appui dans les choses, c'est évident, puisque les formes dont on parle sont *à priori;* nul point d'appui dans la pensée, car comment imaginer que le lieu étendu soit une forme de la pensée inétendue?

ment divisible en un nombre fini de parties élémentaires.

Il est d'ailleurs aisé d'établir, sous la garantie du principe de contradiction, que l'élément du lieu doit être comme l'élément du composé matériel, indivisible et inétendu.

En effet, l'élément dynamique est simple, ainsi que nous l'avons établi. Supposons maintenant qu'il occupe une portion d'espace étendue ; il est clair que cette portion d'espace sera aussitôt conçue comme divisible, et que sa divisibilité entraînera celle de l'élément qui l'occupe : ce qui est contraire à l'hypothèse.

A l'élément actif, à l'unité de Force, doit donc répondre, dans l'espace réel, l'élément inerte ou l'élément vide, point d'application du premier; l'un dépendant nécessairement de l'autre, tous deux doivent être considérés comme inétendus.

On ne prétend pas que le nombre des éléments vides qui constituent le lieu soit rigoureusement égal au nombre des éléments dynamiques qui paraissent lui correspondre. Nous savons que les parties d'un agrégat matériel sont séparées les unes des autres par des intervalles ; or ces intervalles peuvent être occupés; il faut donc qu'ils enferment *autant de points qu'ils peuvent enfermer, à un moment donné, d'éléments réels.*

Outre la différence caractéristique qui sépare la réalité de l'abstraction, on pourra donc toujours établir entre le corps et le lieu qu'il occupe, cette importante distinction, que les éléments réels qui constituent le premier sont ou peuvent être épars, tandis que les points vides qui remplissent le second ne sont intelligibles que s'ils sont *contigus.*

Une pareille contiguité n'est assurément pas représentable. Mais quoi de plus naturel? L'imagination, qui ne peut atteindre jusqu'aux derniers éléments, ne se figurera jamais le rapport de ces éléments entre eux. Dans l'absolu, encore une fois, nous devons renoncer d'avance à toute intuition sensible et n'accepter que les conclusions de la Raison.

La plupart des difficultés que l'on soulève sont empruntées aux spéculations mathématiques. On veut appliquer à la chose

déterminée en soi la loi de l'indéterminé et de l'abstrait. On objecte, par exemple, qu'il serait difficile, sinon impossible de concevoir comme distincts des points géométriques qui seraient tangents. Soit; mais il faut prendre garde que les points géométriques ne sont qu'abstractions pures. Au contraire, les éléments du lieu en soi, sans être comme ceux du composé matériel dynamiques dépendent, quant à leur existence, de ces derniers, et, ainsi que nous l'avons vu, leur sont attachés, chacun à chacun, comme autant de points d'application; or, ne l'oublions pas, deux éléments dynamiques, alors même qu'ils seraient contigus, demeureraient impénétrables : en conséquence et par suite de la loi de dépendance déjà invoquée, les points qui leur correspondent dans le lieu doivent jouir à leur tour d'une impénétrabilité véritable, bien que relative, et par suite être conçus comme distincts.

Un penseur d'une rare puissance, mais géomètre plus que métaphysicien, Pascal, n'a pas assez de railleries à l'adresse de ceux de ses contemporains qui, comme le chevalier de Méré, croyaient « que l'étendue se résout finalement en indivisibles. »

« Un indivisible, dit-il dans l'opuscule *De l'esprit géométrique*, est ce qui n'a aucune partie. — L'étendue est ce qui a diverses parties séparées. — Sur ces définitions, je soutiens que deux indivisibles étant unis, ne font pas et ne sauraient faire une étendue.

« En effet, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie, et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisqu'autrement elles ne se toucheraient pas : or, par leurs définitions, ils n'ont pas d'autres parties; donc ils n'ont pas de parties séparées, donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties. »

Quelle que soit l'autorité de son auteur, un tel argument est loin de nous convaincre. Dans le passage qu'on vient de lire, *séparé* veut-il dire simplement *distinct* ou *éloigné*?

Entre l'hypothèse d'un indivisible sans parties, et celle d'un composé dont les parties seraient situées à une certaine distance les unes des autres, la raison aperçoit un milieu : le système que créeraient des parties distinctes, mais contiguës. « Deux parties qui se touchent ne sont pas séparées, » — on l'accorde. — « Deux parties qui ne sont pas séparées ne sauraient constituer une étendue, » — on le nie, ou du moins on le conteste, — car il n'est nullement établi que la contiguité de deux points réunis sans intervalle soit impuissante à former un couple, qui serait étendu, étant divisible. Pascal laisse donc ici une issue à l'adversaire. On lui répondra que des parties qui se touchent ne sont, par définition même, ni séparées ni confondues, et que son argument manque de base.

Dans le réel, l'étendue n'est ni ne saurait être ce qu'elle paraît au géomètre, qui ne la définit qu'en l'imaginant. Des faits d'une portée décisive ne peuvent laisser sur ce point le moindre doute.

Et d'abord le mouvement existe ; nous pouvons franchir dans un intervalle de temps défini une portion déterminée de l'espace. Comment interpréter ce fait? Dirons-nous que le nombre des parties qu'enferme cette portion d'espace est infini [1] ? Non, à moins d'admettre que le nombre infini s'épuise, ce qui est absurbe. Il est donc fini, et les parties successives de l'étendue que nous traversons sont en nombre déterminé. Un pas de plus. Aucune des parties ainsi distinguées et mises à part par l'entendement ne peut se diviser à l'infini : ce serait la contradiction même ; aucune à l'indéfini : l'indéfini dans le réel n'a pas de sens : toutes seront donc nécessairement réductibles, de division en division, à des éléments derniers et par conséquent indivisibles : ce que nous nous proposions de démontrer.

On allègue d'ordinaire qu'un espace infini pourrait être par-

1. Leibniz, qui, dans le réel, admet l'existence, sinon du nombre infini, au moins d'une pluralité sans bornes, dit en parlant des parties de l'espace que le mouvement traverse : « Je ne vois pas quel besoin il y a de les épuiser. » (Lettre à l'abbé Foucher.) Quel besoin répond justement Renouvier? mais le besoin de passer! C'est l'évidence même.

couru en un temps infini lui-même. Mais si le temps dont on parle est un temps réel, s'il est déterminé en soi par les stades progressifs du mouvement qui le mesure, le temps se refusera à l'infinité, tout aussi bien que l'espace; et l'on conviendra que le moyen de faire accepter une impossibilité n'est pas de la doubler d'une impossibilité semblable.

Comme tous les phénomènes de mouvement impliquent l'épuisement des parties de l'espace parcouru, on peut dire qu'il n'est pas un instant de la durée où la preuve que nous voulons faire ne soit faite en un nombre incalculable de points de l'univers. Nous ne voulons insister que sur un fait, mais il est capital et peut tenir lieu de tous les autres. Le plus habile dialecticien de l'antiquité, Zénon d'Elée, le mit pour la première fois en lumière.

Ce fait, le voici : Deux mobiles partis de points différents et suivant la même direction se rencontrent si la vitesse de l'un est supérieure à celle de l'autre. Or une pareille rencontre serait, dans le lieu idéal, inexplicable; il faut donc que le lieu idéal diffère essentiellement du lieu réel.

Expliquons-nous : Le géomètre qui veut rendre compte du phénomène que l'observation constate doit choisir entre deux hypothèses : celle du mouvement discontinu qui nous donne gain de cause, et celle du mouvement continu qui lui interdit toute solution. Dans le premier cas, il est tenu d'admettre que le lieu est discontinu [1], comme le mouvement qui s'y produit; or nous ne demandons pas autre chose. Dans le second, il ne peut, quoi qu'il fasse, expliquer la réalité; c'est ce qu'il est aisé d'établir.

Pour fixer nos idées, posons, comme l'avaient fait les anciens, le problème sous une forme concrète :

Deux coureurs entrent en lice : l'un renommé pour son agilité, c'est Achille; l'autre connu pour sa lenteur, la tortue. Feignons, en vue de simplifier, que la vitesse du premier soit

1. Le lieu est discontinu s'il est formé de surfaces, de lignes et de points contigus. La contiguïté, en effet, implique l'individualité et la détermination, que la continuité supprime.

décuple de celle du second, et que la distance qui sépare l'un de l'autre soit de dix unités de mesure. Ils partent, et en peu d'instants Achille aux pieds légers atteint la tortue; on peut même, par le calcul, fixer exactement le point de rencontre. — Voilà le fait. — Or nous soutenons qu'on sera toujours impuissant à l'expliquer à l'aide de considérants fondés sur la continuité géométrique. Si l'espace franchi par les deux coureurs est de même nature que l'étendue idéale, Achille doit renoncer à atteindre la tortue. Comment l'atteindrait-il? L'avance de la tortue sera toujours de un dixième de l'espace franchi par Achille, et, comme la divisibilité d'une semblable étendue est sans fin, le dixième dont nous parlons représentera toujours une *étendue*, par suite une *avance*. La rencontre, en définitive, sera impossible.

Il est si facile de s'abuser dans des problèmes d'un ordre aussi délicat, que, au lieu de répondre à la question véritable, souvent et sans s'en douter on l'élude. Nous demandons *comment*, et l'on répond comme si nous demandions *quand*. Il faudrait cependant s'entendre. Nous partons de ce fait que les deux coureurs se rencontrent; dès lors il est tout naturel que ce soit en un point déterminé et déterminable. Là n'est pas la difficulté : c'est ce qu'ont fort bien vu, parmi les contemporains, Grote et Renouvier [1]. La problème est de savoir comment, dans l'infiniment divisible du géomètre, le phénomène, que dis-je, le miracle de la rencontre se produit. On nous dit : « Si vous saviez user des procédés de l'algèbre, vous verriez avec quelle aisance se tranche le nœud. La méthode qui suppose le problème résolu, méthode malheureusement trop peu familière au logicien, vous mettrait d'emblée au point de rencontre déterminé à l'avance. » Voyons donc ce qu'on nous propose en s'aidant d'un exemple analogue, celui des aiguilles d'une montre. « La petite aiguille, dirait excellemment l'algébriste dont on nous recommande les procédés,

1. Grote, *Plato and the others companious of Socrates*, ch. II (*Zenonian dialectic*).
Renouvier, *Essais de critique* (*Logiq.*, t. I, ch. XI, *Observations*).

aura parcouru, pour atteindre un point de rencontre, un chemin égal au chemin parcouru par la grande aiguille, diminué d'une circonférence entière de cadran. » — Je traduis avec toute la rigueur possible : — les deux aiguilles étant à midi, par exemple, je décide en premier lieu qu'une première rencontre aura lieu au bout d'un certain temps. Soit; mais qui me l'a dit, sinòn l'expérience? L'impossibilité est flagrante au point de vue de la quantité continue. Vous ne pouvez décider *à priori* que la grande aiguille atteindra l'autre : j'ai le droit d'affirmer au contraire que, dans le lieu idéal qui est celui de l'hypothèse, il est radicalement impossible que cela soit. Autre chose est de supposer, en algèbre, le problème résolu, et autre chose, en logique, de postuler ce qui est en question. — Poursuivons. — Je décide, en second lieu, que le point de rencontre est un point tel que la grande aiguille aura dû faire le tour du cadran, et, en outre, le chemin nécessaire pour atteindre la petite. — Je crois bien, en effet, que, si elle l'atteint, elle ne saurait l'atteindre autrement. Mais quel est donc ce chemin nécessaire? — Il est si bien déterminé, nous dit-on, que le calcul le fixe exactement. — Raison de plus pour qu'on veuille bien nous apprendre comment l'inépuisable s'est épuisé, l'insommable s'est sommé.

Une manière plus simple encore d'éluder la question est la suivante : Puisque, en deux heures, la grande aiguille fait deux fois le tour du cadran, elle aura nécessairement atteint et dépassé la petite, qui dans le même temps n'a pu faire que les deux douzièmes d'un tour complet. — On l'accorde, et vous croyez l'antinomie résolue ! C'est ignorer ce qu'il faut prouver. Vous pourriez dire de même : Achille en une seconde a parcouru une distance représentée par dix unités de mesure; or, dans le même temps, la tortue, dont la marche est, je suppose, dix fois moins rapide, n'a franchi qu'une seule de ces unités. Que va-t-il se passer dans la seconde suivante? La tortue, n'avançant que d'une nouvelle unité, se verra dépassée par Achille, qui en aura parcouru vingt. Et après? Prétendez-vous nous apprendre que le fait de

la rencontre existe? Nous n'en doutons pas plus que vous. Dites-nous donc seulement comment les avances successives de la tortue, avances qui doivent toujours être d'un dixième, ont fini dans la réalité par se réduire à zéro. Encore une fois, — ou le lieu réel diffère du lieu idéal, — ou l'expérience contredit formellement la raison. »

On fera appel, en désespoir de cause, à la méthode infinitésimale. La tortue, je suppose, n'a qu'une avance d'un mètre, avec une vitesse dix fois moindre; ne peut-on représenter le chemin parcouru par Achille au moyen de la progression suivante?

$$1 \text{ mètre} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{100\,000} \cdots$$

progression qui peut s'écrire encore :

$$1 \text{ mètre} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5}\ \frac{1}{10^n} \cdots$$

Rien, à première vue, de plus rigoureux. Une pareille progression, munie de tous ses termes, représente bien, à ce qu'il semble, la somme des avances de la tortue, et par suite la somme des portions d'espace qu'Achille devra franchir pour l'atteindre. Mais ne nous laissons pas abuser par des fictions. La progression n'est pas donnée; elle est au contraire inachevable, parce qu'elle est indéfinie. La somme des avances de la tortue ne pourra donc jamais être faite, si bien qu'Achille, qui se propose de la faire à son tour et pour son compte, arrivera toujours trop tard. Son agilité ne lui sera d'aucune aide, car il a affaire à une quantité fuyante, qui ne se termine ni ne s'arrête, et, condamné à fournir dans l'infiniment petit des étapes de plus en plus répétées et de plus en plus courtes, il s'apercevra à chaque instant qu'une étape plus courte que la précédente le sépare d'un terme impossible. Bref, la solution qu'on nous propose se retourne contre elle-même, car en voici l'exacte traduction : Il est aussi

impossible à Achille d'atteindre la tortue qu'à la progression qui représente le chemin à parcourir pour cela d'avoir un terme.

Il semble, à la vérité, que le mathématicien puisse sommer ce que nous déclarons, peut-être à tort, insommable. Ainsi, dans le cas présent, il sait et peut prouver que la limite de la progression proposée est $1 + \frac{1}{9}$ ou $\frac{10}{9}$. La solution du problème est donc représentée à ses yeux par cette fraction, qui satisfait à l'énoncé et marque en effet le point de rencontre.

Nous ferons observer que cette fraction n'est qu'une anticipation de l'esprit, qui, plutôt que de suivre, terme à terme, la progression dont on parle, la devance et se précipite, d'un bond, à la limite. Que, dans l'abstrait, un tel procédé soit justifiable, nous l'admettons volontiers; nous nous proposons même d'en établir la légitimité à propos de la quantité mathéмathique; mais qu'il explique quoi que ce soit dans le cas présent, c'est toute autre chose. Il faudrait, pour que le problème fût résolu, que la progression atteignît la limite en même temps que l'esprit lui-même, ce qui, de l'aveu même de nos adversaires, est purement et simplement absurde.

Qu'est-ce donc en réalité que la limite $\frac{10}{9}$? Un point fixe pour l'esprit, qui, tenant compte de l'expérience sensible, comprend qu'il doit s'arrêter. Ce point fixe symbolise pour lui la limite réelle, la limite fixée par la nature, limite que dans son *decrescendo* continuel la progression mathématique atteint, on ne sait où ni quand. Y a-t-il concordance entre le procédé subjectif de l'entendement et la divisibilité objective du lieu? Ce que nous pouvons affirmer dès maintenant, c'est que pour l'esprit, comme pour la nature, la limite ne peut être atteinte que lorsque toute fraction d'étendue, si petite qu'on la suppose, a disparu [1].

1. Si fatigante que puisse être pour le lecteur une discussion aussi abstraite, il voudra bien, en raison de l'importance du but, nous pardonner un nouvel appel à son attention. Voici un essai de solution qui

Les considérations précédentes établissent, selon nous, d'une manière absolue, que le lieu idéal et le lieu réel n'ont rien de commun. Ce dernier est visiblement réfractaire à la divisibilité indéfinie. Sortons maintenant de l'hypothèse du

semblera plus plausible que les autres, mais que nous ne saurions admettre :

On sait que la rencontre, dans le cas proposé, se fait à une distance de $\frac{1}{9}$ de mètre du point de départ de la tortue ou à 1 mètre + $\frac{1}{9}$ de mètre du point de départ d'Achille. Les deux grandeurs à comparer sont : 1° le chemin parcouru par Achille; 2° le chemin parcouru par la tortue, plus la distance qui les séparait à l'origine. Il faut arriver à montrer comment ces deux grandeurs peuvent devenir égales et leur différence nulle.

Si j'appelle pour simplifier *t* le temps que met la tortue à faire $\frac{1}{9}$ de décimètre, je pourrai former le tableau suivant :

Temps.	Chemin fait Par Achille.	Chemin fait Par la Tortue.	Distance.
0	0	0	$\frac{90}{9}$ décim.
t	$\frac{10}{9}$ décim.	$\frac{1}{9}$	$\frac{81}{9}$
2*t*	$\frac{20}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{72}{9}$
3*t*	$\frac{30}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{63}{9}$
4*t*	$\frac{40}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{54}{9}$
5*t*	$\frac{50}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{45}{9}$
6*t*	$\frac{60}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{36}{9}$
7*t*	$\frac{70}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{27}{9}$
8*t*	$\frac{80}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{18}{9}$
9*t*	$\frac{90}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{9}$
10*t*	$\frac{100}{9}$	$\frac{10}{9}$	0

Ainsi, au bout du temps 10*t*, les deux mobiles se rencontrent et leur différence devient nulle. Elle a pu devenir rigoureusement nulle, parce qu'à chaque instant *t* la distance initiale a diminué d'une partie aliquote de sa valeur.

Nous répondrons brièvement :

L'essai d'explication repose sur deux postulats qu'il est impossible d'accorder.

On ne divise en effet la distance totale en neuvièmes de décimètres

géomètre : admettons que l'élément de l'espace soit inétendu; aussitôt l'antinomie disparaît. Le *quomodo* est donné en même temps que le *quando;* le mouvement s'explique, et avec le mouvement, la différence des vitesses et la possibilité des rencontres. Je suppose, en effet, que le dixième d'avance qu'a la tortue ne soit plus, de division en division, à un moment déterminé en soi mais indéterminé pour nous, que l'élément ultime et indivisible : pendant qu'Achille occupe ce point, l'avance de la tortue devient rigoureusement nulle, car le dixième d'un indivisible n'existe pas. La rencontre dès lors a lieu, et le problème est résolu [1].

que parce qu'on sait déjà que la rencontre aura lieu au moment précis où la tortue aura parcouru un de ces neuvièmes.

On postule donc implicitement avant de poser le problème :

1° Que la rencontre ait lieu;

2° Qu'elle ait lieu en tel point déterminé de l'espace.

Or, dans le continu, une telle rencontre étant impossible, ainsi que nous l'avons établi, on n'a pas le droit de prendre pour unité le chemin que *devrait avoir parcouru la tortue au cas où elle aurait lieu.*

Expliquons notre pensée : en dehors de l'expérience, une pareille unité n'est déterminable que par la méthode des limites ou par le calcul. Dans le premier cas, on remarquerait que la rencontre est de plus en plus voisine, à mesure qu'on approche davantage de la fraction limite $\frac{1}{9}$. Mais il n'y a là qu'une tendance qui, dans le continu, ne saurait aboutir. Dans le second, on ferait sans doute observer que, la vitesse de l'un des mobiles étant dix fois celle de l'autre, il suffirait au plus rapide des deux d'avoir franchi le premier mètre, c'est-à-dire la distance initiale, pour avoir gagné les $\frac{9}{0}$ de ce qu'il doit gagner avant la rencontre; le dernier dixième pourrait donc être gagné à son tour, pendant que la tortue ferait neuf fois moins de chemin, c'est-à-dire $\frac{1}{9}$ de décimètre. Mais encore, une fois, si l'espace réel est continu, aucun gain effectif n'est possible, et le problème, au lieu de se simplifier, se complique en se posant de nouveau à toutes les étapes du mouvement. Comment, en effet, une avance, si petite qu'elle soit, serait-elle possible, si le terme de toutes les avances est toujours à l'infini?

1. Si l'on refuse d'admettre que le *lieu réel* se compose d'éléments indivisibles et contigus *en nombre donné,* on se heurte, quoi qu'on fasse, à une insoluble antinomie. — Vous voulez que le lieu *réel* soit, comme le lieu *idéal, continu* et *divisible* à l'*infini;* c'est l'hypothèse; or le lieu réel s'épuise, voilà le fait; donc le nombre infini s'épuise, sinon dans l'esprit, au moins dans la nature; qu'on puisse ou non le sommer dans le calcul, il est sommé hors de nous et dans les choses. — Telle est l'objection capitale qui défraie la récente polémique soulevée par le problème de l'infini entre M. Renouvier et M. Lotze. « Il faut, dit ce dernier, que la

On demandera comment il est possible d'expliquer dans l'entendement la présence d'une notion aussi différente de la réalité que celle de l'étendue idéale ou géométrique. Il est aisé de remonter à son origine et d'en établir la filiation.

Elle a sa raison d'être dans l'imagination, qui elle-même l'emprunte aux sens. Les sens, instruments grossiers, réunissent et condensent en quelques éléments visibles et tangibles des myriades d'éléments réels. La main de Gargantua n'eût pas senti les larges pores d'une éponge : nos mains et, en général, nos organes sont également hors de proportion avec la réalité moléculaire : de là l'impossibilité où nous sommes de nombrer, en les percevant, les parties constitutives des corps, et, par suite, l'illusion presque invincible du continu qui masque à nos yeux le déterminé et le discret. Pour la vue, même pour le toucher, un nombre immense, incalculable d'éléments n'est plus qu'un point. Ce point, synthèse d'une multitude d'indivisibles, entrera lui-même comme élément dans la perception totale : atome de sensation, il se fondra peu à peu dans la série continue des atomes de sensation voisins et semblables, aucun d'entre eux n'ayant au regard de la conscience des contours suffisamment précis et déterminés : la résistance dès lors semblera continue, bien que les groupes atomiques qui lui donnent naissance soient discontinus : ainsi de la couleur et de toutes les autres sen-

réalité vienne à bout d'une tâche qui ne nous réussit pas... et l'on se demande ce qu'il est possible de répondre, si l'on rejette l'infinité actuelle. — Que l'espace n'existe que dans l'entendement et que nous ne savons rien de l'espace réel? — Nous savons au moins de lui qu'il s'épuise et cela suffit; il est clair *à priori* qu'un tel espace ne peut être représenté, mais il est également clair que dans son fond inconnu et inconnaissable, il doit être tel que nous puissions le traverser, puisqu'en effet nous le traversons. — Si l'on prétend que la distinction du *réel* et de l'*idéal* est ici purement illusoire, c'est dans l'entendement lui-même que la contradiction va descendre, dans l'entendement qui conçoit comme épuisé, toutes les fois qu'il affirme le mouvement, ce qu'il déclare *à priori* inépuisable. — Pour obtenir une solution, il faut décidément abandonner l'hypothèse du lieu continu; c'est peut-être ce que veut faire entendre M. Renouvier lorsqu'il dit (*Revue phil.*, 5e année, n° 6) « qu'il conviendrait de chercher s'il n'existe pas quelque moyen d'attribuer la réalité à l'espace, en un certain sens honnête de ce mot réalité, qui n'entraîne pas la négation des lois de l'entendement. »

sations étalées sans intervalles ni intermittences quelconques à la surface des choses. C'est alors qu'à son tour l'imagination intervient. Elle s'attache au fantôme sensible pour le perpétuer en dehors de la cause qui l'a fait naître; mais, impuissante à maintenir intacte sous son regard cette ombre d'existence toujours prête à s'évanouir, elle ne se la représente qu'à la condition d'en laisser le dessin plus vague et les lignes plus flottantes. Les nuances disparaissent; les couleurs pâlissent; la résistance s'efface. L'imagination ne peut plus transmettre à l'entendement qu'une froide copie de la réalité vivante, où il est difficile d'apercevoir autre chose que le fond monotone et décoloré de l'étendue. Encore n'est-ce point l'étendue véritable, l'étendue en soi, telle que la raison l'affirme et la définit, mais le résidu de sensations qui, après s'être jouées à sa surface, lui ont transmis le caractère d'indétermination qui leur est propre. Le géomètre essaye d'arrêter ces formes fuyantes, en les fixant dans des cadres exacts. Quoi qu'il fasse, le contenu demeure incertain entre les lignes qui le circonscrivent, et son nom véritable est celui que lui donnent les sciences abstraites : l'indéfini.

Comment un tel concept devient, dans la pratique, analogue, sinon adéquat à la réalité des choses, c'est ce que le plan que nous nous sommes imposé nous interdit d'examiner en ce moment ; il sera temps d'aborder cet intéressant et délicat problème, lorsque, après avoir étudié la quantité sous sa forme la plus abstraite, nous aurons à nous demander dans quelle mesure le phénomène pourrait répondre au noumène, l'étendue géométrique au lieu en soi.

II

La durée en soi ou la durée réelle.

La solution proposée pour le lieu en soi s'impose, par analogie, aux quantités de même nature. La durée réelle n'est donc et ne saurait être pour nous, que la période de temps

déterminé qui mesure une série donnée de phénomènes successifs.

Comme ces phénomènes ne peuvent enfermer un nombre infini de phénomènes élémentaires, ils se résolvent de toute nécessité en éléments indécomposables. Autant de ces éléments, autant d'instants absolus.

Au regard de la raison, l'instant absolu est affranchi de la durée, comme le point de l'étendue. Le parallélisme est complet.

Les instants de la durée en soi, aussi bien que les points de l'étendue en soi, ne sauraient être que contigus. Les instants réels en effet, marquant la trace des phénomènes élémentaires et leur servant de point d'attache dans le temps, se conçoivent comme distincts les uns des autres, et jouissent à ce titre d'une individualité relative; par suite, ils doivent se grouper en nombres définis. Ces nombres, à la vérité, nous échappent, mais rien ne doit moins nous surprendre ; il nous suffit de savoir *à priori* que tout ce qui est conçu comme donné, doit être conçu comme déterminé.

Remarquons d'ailleurs que les phénomènes internes se succèdent dans la conscience sous forme d'unités discontinues. Chacun d'eux apparaît à son tour et s'éclipse. Autant d'apparitions, autant de coupures. Or ces événements peuvent se résoudre eux-mêmes par l'analyse. Les unités primitives fourmillent alors d'unités nouvelles, grosses, à leur tour, d'autres unités que l'imagination renonce à suivre dans l'obscurité où elles descendent, mais dont la raison doit affirmer l'existence concrète et distincte. Que les moments qui leur correspondent et scandent pour ainsi dire leur passage, tendent alors à se fondre entre eux, et, en se rapprochant, à composer pour la conscience une trame unie, rien de plus explicable au point de vue phénoménal; mais, dans la réalité, ils doivent suivre la loi des phénomènes qui les engendrent, et ne peuvent être, pour cela même, que discontinus.

Cette conclusion froissera des préjugés opiniâtres. Il semble que les événements qui composent l'existence de chaque être

doivent se suivre sans intermittence, si l'on tient à lui conserver quelque ombre d'identité. Mais comment admettre sérieusement que la continuité soit dans les phénomènes? Loin de se serrer en un tissu uniforme, ils apparaissent disjoints; ils étonnent même par leurs disparates. Le principe de la permanence ou de l'individualité de l'être, que nous atteste la mémoire, est plus profond. C'est l'esprit lui-même, l'esprit, capable de s'opposer dans son unité immobile à la multiplicité fugitive des événements, l'esprit, centre indivisible, où les phénomènes discrets et séparés plongent par leur racine, et prennent ainsi l'apparence de la continuité qui leur manque.

On dira sans doute : L'instant est un infiniment petit; c'est une limite qu'il est impossible d'atteindre. Toujours l'inévitable confusion entre l'abstrait et le concret, entre la géométrie et la nature! Que la limite soit à l'indéfini dans l'abstrait, rien de plus naturel, puisque nous ignorons la loi de génération des grandeurs : qu'il en soit ainsi dans le concret, on ne saurait l'accorder, tout progrès devant y être réglé à l'avance d'une manière certaine et avec une rigueur absolue. Et cependant le malentendu tend sans cesse à renaître! Le philosophe lui-même a besoin, pour s'en préserver, d'une attention soutenue. On se représente d'ordinaire une certaine fraction du temps comme une grandeur indéfiniment malléable qu'il est loisible à l'entendement de diviser et de subdiviser sans aucun terme; on fait donc de cette durée concrète une possibilité pure, ou plutôt on y enferme la possibilité indéfinie du contingent et du successif. Ce n'est là, nous le savons, qu'un épisode de la lutte que se livrent à chaque instant au sein de l'intelligence l'imagination et la raison. Il est, à la vérité, plus aisé d'expliquer de telles confusions que de les prévenir. Dans le temps comme dans l'espace, l'imagination symbolise l'indéterminé par le continu : ce qui, pour elle, est sans nombre fixe, doit pouvoir subir des divisions en nombre quelconque : la seule durée qu'elle se représente est donc une durée telle qu'elle se résolve, à l'aide du procédé

dichotomique qui lui est familier, en durables toujours plus courts, mais toujours renaissants. — La durée véritable, la durée en soi ne saurait être maniable à ce point. — Rebelle à cette loi de répétition qui résulte d'une nécessité toute subjective de l'entendement, elle ne connaît et ne peut connaître d'autres exigences que celles du mouvement rythmique des phénomènes qui marquent ses divisions réelles. Imaginer une durée continue *à priori* pour façonner à sa ressemblance la réalité durable, c'est philosopher au rebours des choses. On part d'un concept que l'esprit a extrait, en le raffinant toujours, de la représentation sensible, puis, remontant, au lieu de le descendre, le cours des phénomènes naturels, on entend modeler sur ce concept la réalité elle-même! On prend le résidu idéal de la représentation, pour une forme dont la chose en soi doit porter l'empreinte!

Il faut le reconnaître : comme le sens, la conscience est obtuse; elle ne voit que par masses, elle devine plutôt qu'elle ne saisit d'une prise directe ces phénomènes intégrants, qui, à mesure qu'ils se simplifient, s'obscurcissent sous son regard : on dirait des fils multiples et compliqués d'un écheveau, qu'un œil attentif mais affaibli ne parvient plus à discerner. La nature, qui, en égard à l'imperfection de nos moyens de connaître, nous semble ne jamais se lasser de fournir, fournit donc, en effet, au sens intime, bien au delà de ses aptitudes subjectives à percevoir, et le champ de la vision intérieure nous paraît occupé tout entier sans vide ni place possible, alors que d'invisibles phénomènes y tracent encore, dans la réalité, de multiples divisions. De là, pour la conscience aussi bien que pour le sens, l'illusion de la continuité, continuité toute relative, et qu'explique seul le point de vue phénoménal où l'esprit se place. De Quincey vit cent ans en une nuit. Il faut donc que les intervalles se multiplient, que la conscience avivée et plus pénétrante voie défiler devant elle non plus les groupes, mais les unités, non plus les produits, mais les facteurs! Le temps paraît alors s'enfler : c'est que les instants de la durée sont plus nettement démêlés; tels ces corps qui

paraissent grandir au microscope, bien que le microscope ne fasse que les ramener à leur grandeur naturelle. Illusion, dites-vous. Que direz-vous donc alors de la rapidité foudroyante de l'électricité ou de la lumière? Que direz-vous de ces instants démesurément courts, auxquels répondent ou plutôt que créent leurs ondulations successives? Vu de ces atomes de durée, le temps prend des proportions immenses, gigantesques, mais que la raison refuse d'appeler infinies.

A l'extrémité opposée, l'infiniment petit, l'instant que la nature ne pourrait atteindre, n'est qu'une vaine idole, une de ces idoles de la caverne, où l'on ne touche que des ombres, où l'on n'embrasse que des illusions.

III

Le mouvement en soi ou le mouvement réel.

Absolu ou relatif, réel ou apparent, le mouvement ne saurait se concevoir que comme un produit. Outre l'idée de force, destinée à expliquer son origine, les deux facteurs qui le constituent essentiellement pour l'intelligence, sont les concepts de durée et d'étendue : étendue et durée purement intelligibles, s'il s'agit du mouvement idéal, du mouvement tel qu'on le définit en mécanique en vue de le soumettre au calcul; étendue et durée réelles, si l'on attache de préférence sa pensée au mouvement tel qu'il doit exister dans la nature, au *mouvement en soi.*

Une question préjudicielle et qui prime toute discussion est celle-ci : Le mouvement en soi, est-ce autre chose qu'une chimère? Depuis Parménide et Zénon d'Elée, qui imaginaient un monde compacte et sans divisions, bien des philosophes, pour des raisons différentes, l'ont nié ou contesté; bien des savants ont fait à ce sujet d'expresses réserves. Pour ne parler que des temps modernes, après l'illustre auteur de la *Critique*, aux yeux de qui le mouvement n'était et ne pouvait être qu'un phénomène, Hamilton, Mill, Spencer, en Angle-

terre, ont très vivement critiqué l'opinion qui lui prête une réalité objective.

« On pousse un corps avec la main, dit M. Herbert Spencer[1], et l'on voit qu'il se meut dans une direction définie. A première vue, il semble qu'il n'y ait pas moyen de douter de la réalité de son mouvement, ni de la direction qu'il suit. Cependant il est facile de montrer que non seulement nous pouvons avoir tort, mais que d'ordinaire nous avons tort de porter l'un ou l'autre de ces deux jugements. Voici par exemple un vaisseau que pour plus de simplicité nous supposerons mouillé à l'équateur, l'avant tourné vers l'ouest. Quand le capitaine va de l'avant à l'arrière, dans quelle direction se meut-il? Vers l'est, répondra-t-on évidemment, et pour le moment cette réponse peut passer; mais on lève l'ancre et le vaisseau vogue vers l'ouest, avec une vitesse égale à celle du capitaine qui marche vers l'est; dans quelle direction se meut à présent le capitaine quand il va de l'avant à l'arrière de son navire? Nous ne pouvons plus dire l'est, comme tout à l'heure, puisque, tandis qu'il va vers l'est, le vaisseau l'emporte vers l'ouest, et réciproquement nous ne pouvons pas dire l'ouest. Par rapport à l'espace ambiant, il ne bouge pas, quoiqu'il paraisse se mouvoir pour tout ce qui est à bord. Mais sommes-nous tout à fait sûrs de cette conclusion? Le capitaine est-il réellement toujours au même point? Quand nous tenons compte du mouvement de la terre autour de son axe, nous voyons que, loin d'être stationnaire, le capitaine voyage vers l'est à raison de 1000 milles par heure, de sorte que la perception de celui qui le regarde, pas plus que celle de celui qui tient compte du mouvement du vaisseau, ne se rapproche de la vérité. De plus, un examen attentif nous fera voir que cette conclusion corrigée ne vaut pas mieux que les autres. En effet, nous avons oublié le mouvement de la terre dans son orbite; comme il est de 68 000 milles par heure, il s'ensuit que, en supposant qu'il soit midi, le capi-

1. Herbert Spencer, *Premiers principes*, trad. Cazelles, p. 57.

taine se meut, non pas à raison de 1000 milles à l'heure vers l'est, mais à raison de 67 000 vers l'ouest. Et pourtant nous n'avons pas encore trouvé le vrai sens ni la vraie vitesse de son mouvement. Au mouvement de la terre dans son orbite, il faut joindre celui du système solaire tout entier vers la constellation d'Hercule, et, si nous le faisons, nous voyons que le capitaine ne va ni vers l'est ni vers l'ouest, mais qu'il suit une ligne inclinée sur le plan de l'écliptique et qu'il va avec une vitesse plus grande ou moindre (selon l'époque de l'année) que celle que nous avons donnée. A cela il faut ajouter que, si les arrangements dynamiques de notre système sidéral nous étaient complètement connus, nous découvririons probablement que la direction et la vitesse du mouvement réel diffèrent encore considérablement des résultats obtenus. On voit donc combien nos idées de mouvement sont décevantes. Ce qui semble se mouvoir est en réalité stationnaire; ce qui semble stationnaire se meut en réalité; ce qui, d'après nous, se meut dans une direction, se dirige avec une rapidité plus grande dans une direction contraire. Nous apprenons ainsi que ce dont nous avons conscience, ce n'est pas le mouvement réel d'un objet, dans sa vitesse ou sa direction, mais son mouvement mesuré par rapport à un point donné, soit celui que nous occupons, soit tout autre. Cependant, en concluant que les mouvements que nous observons ne sont pas les mouvements réels, nous supposons implicitement qu'il y a des mouvements réels; nous corrigeons les jugements successifs que nous portons sur la direction et la vitesse d'un objet, et nous tenons pour certain qu'il y a une direction réelle et une vitesse réelle : nous tenons pour certain qu'il y a dans l'espace des points fixes par rapport auxquels tous les mouvements sont absolus, et nous trouvons qu'il nous est impossible de nous débarrasser de cette idée. Néanmoins, le mouvement absolu ne peut être imaginé et moins encore perçu. Le mouvement considéré à part des conditions d'espace que nous lui associons d'ordinaire, est complètement inconcevable. En effet, le mouvement est un changement de lieu,

mais dans un espace sans limites le changement de lieu est inconcevable, parce que le lieu lui-même est inconcevable. Le lieu ne peut être conçu que par rapport à d'autres lieux, et, en l'absence d'objets dispersés à travers l'espace, un lieu ne peut être conçu que par rapport aux limites de l'espace : d'où il suit que dans un espace illimité un lieu ne peut être conçu, et que tous les lieux doivent être à égale distance de limites qui n'existent pas. — Ainsi, d'une part, nous sommes obligés de penser qu'il y a un mouvement absolu, et de l'autre que le mouvement absolu est incompréhensible. »

Certes, on ne saurait critiquer avec plus de force l'illusion de ceux qui prennent pour la réalité véritable le phénomène sensible et purement relatif. Devons-nous cependant, sur la foi de ce vigoureux réquisitoire, condamner sans appel et bannir à jamais de la raison, comme contradictoire, l'idée du mouvement en soi? Si l'on nous mettait en demeure, un premier scrupule nous arrêterait. — Le mouvement absolu, dites-vous, répugne à l'entendement : — comment alors se fait-il que le mouvement relatif l'implique de toute nécessité? Nous voilà en face d'une de ces difficultés aiguës que, depuis les Eléates, les philosophes se transmettent sous le nom de paradoxes ou d'antinomies, mais que l'intelligence humaine, sous peine de se nier elle-même, n'a pas le droit de regarder comme insolubles. Le principe de contradiction exige en effet, tout milieu exclus, ou que le mouvement relatif puisse se concevoir comme indépendant du mouvement absolu, ou que le mouvement absolu existe : or la première supposition répugne à l'entendement. — Qu'est-ce que le mouvement relatif? — Le mouvement d'objets qui se déplacent par rapport à d'autres objets; purement phénoménal, il tombe sous le sens et s'offre partout à nos regards : c'est le mouvement du capitaine qui se promène sur son navire, du navire qui flotte sur l'Océan; nul n'a jamais contesté ni ne contestera jamais son existence. — Voyons maintenant ce qu'elle implique. — Il est certain que le mouvement, même relatif, est lié dans la nature à l'exercice et au déploiement de la force. Or la force est, à coup sûr, ce

qu'il y a de moins illusoire et de moins relatif au monde. Le capitaine qui se promène de l'avant à l'arrière de son vaisseau pendant qu'il est en marche, emploie à mouvoir ses membres une quantité d'énergie dont les résultats sont palpables, puisqu'il modifie, par suite d'efforts volontaires et répétés, les relations qu'immobile il eût entretenues avec les autres objets supposés fixes. Ce n'est pas tout : le capitaine se meut sur son vaisseau ; le vaisseau se meut à la surface du globe, le globe dans l'orbite solaire, le soleil autour d'Hercule... et après ?... Hercule nous entraîne-t-il lui-même à de nouvelles et incalculables distances dans l'espace ? Soit encore. Mais de mouvement en mouvement pensez-vous aller jusqu'à l'infini ? Voilà ce qui serait vraiment inintelligible. Il faut s'arrêter, il faut reconnaître la nécessité d'une limite fixe, et cette limite ne peut être que le terme absolu où tout mouvement relatif expire. La sphère spatiale qui enveloppe la somme des mouvements cosmiques est le point de repère que nous cherchons [1].

Cette conséquence est rigoureuse si l'on veut bien prendre garde que le mouvement relatif dont l'existence est certaine deviendrait inexplicable dans l'hypothèse d'un progrès à l'indéfini : d'une part, en effet, on affirmerait la réalité positive d'une forme du mouvement, sous certaines conditions, et de l'autre, on déclarerait que la série de ces conditions toutes nécessaires pour l'amener à l'existence est inépuisable. N'est-ce pas là une franche contradiction dans les termes ?

Mais alors comment concevoir le mouvement réel, le mouvement en soi ? Il est certain que nous ne nous le représenterons jamais d'une manière sensible ; ce qui est également positif, c'est qu'on essayerait en vain de prouver qu'il est irrationnel et absurde. — Une sphère immense, le monde ; — comme trame, des points contigus [2] ; — parmi eux, flottant çà

1. Nous disons sphère pour plus de simplicité ; on peut se représenter sous une forme plus capricieuse et bien autrement malaisée à définir, la limite des mouvements cosmiques.

2. Que de pareils points de repère puissent préexister aux choses c'est ce qui est très loin de notre pensée ; la réalité seule les détermine, et on ne les conçoit logiquement qu'après les éléments dynamiques dont ils marquent la trace actuelle ou possible.

et là, des unités dynamiques en nombre inimaginable; — que faut-il de plus pour entrevoir la possibilité du mouvement réel? Dans ce vaste système où tous les rapports seraient exactement définis et mesurés par le nombre des points que la matière occupe ou qui s'interposent entre ses parties, le mouvement en soi résulterait d'un changement d'état qui n'a rien d'inintelligible. Tantôt les atomes isolés se groupent, tantôt ils se dispersent; ici des vides s'ouvrent, là des lacunes sont comblées. — Nous nous demandons ce que peut enfermer de contradictoire une pareille interprétation des choses. Certes on ne prétend pas que la science puisse jamais déterminer avec exactitude l'ensemble de ces relations mobiles et variées. Il faudrait, comme on dit, qu'elle fût au point, et, avant de se mettre au point, elle aurait dû épuiser la série entière des mouvements relatifs. Un tel espoir lui est interdit. Il n'est et ne saurait être réalisé que pour qui voit les choses du dehors, pour Dieu, le géomètre par excellence, et comme le dit si justement Aristote, le seul véritable philosophe [1].

Soit, dira-t-on; mais ce lieu des mondes n'est pas en lui-même déterminable. En êtes-vous certain? Ne peut-on avec quelque vraisemblance soutenir qu'il est au moins déterminé par l'espace imaginaire qui l'enveloppe, et qui, pour la pensée, représente le système des relations possibles entre des mondes virtuels? L'univers ne saurait être conçu comme infini; il faut donc que les réalités qu'il enferme aient leurs limites et que, par suite, le lieu réel n'ait plus de relations qu'avec le lieu idéal qui le circonscrit. Il est vrai que cette conception prête à la critique, car le lieu idéal étant sans bornes, on ne voit plus comment y déterminer le lieu réel. Allons donc au delà, et faisons observer que les associations habituelles de l'esprit humain, si utiles dans le détail des phénomènes, n'ont plus rien à voir avec l'ensemble des choses. Qu'on demande le rapport des parties aux parties, dans un tout donné, on en a

1. Aristote, *Métaph.*, liv. I, ch. II.

Τὴν τοιαύτην (ἐπιστήμην), ἣ μόνος ἢ μάλιστ' ἄν ἔγοι ὁ θεός.

le droit; mais qu'on demande le rapport du tout à quoi que ce soit, c'est purement et simplement absurde. Ici encore, l'imagination nous abuse; elle fait jouer machinalement le ressort destiné, en deçà de certaines limites, à nous emporter d'une représentation à une autre, sans s'apercevoir qu'au delà il joue à vide. Elle prolonge ainsi pour nous la réalité au delà de la réalité même; mais la raison n'est ni complice ni dupe : elle entend assez que dans le tout absolu les rapports ne peuvent être qu'intérieurs, et cet infini que l'imagination étale au delà des sphères n'est, à ses yeux, que l'infini du néant, c'est-à-dire un pur néant d'infini.

A vrai dire, le problème, ainsi posé, n'offre, au point de vue où nous nous plaçons en ce moment, qu'un intérêt indirect et secondaire. Que l'Univers occupe ou non une portion d'espace déterminable au regard de l'espace enveloppant, c'est ce qu'à la rigueur nous pourrions ignorer toujours, sans compromettre en quoi que ce soit la solution que nous poursuivons. Il n'est pour nous, en effet, d'autre question importante que celle-ci : « Le lieu des choses est-il absolument déterminé en deçà de ses bornes et dans ses moindres parties? » En quelque coin de l'immensité qu'on le place, on ne peut répondre qu'affirmativement. La réalité est déterminée par son existence même, et, d'autre part, le lieu n'est que l'ensemble des traces actuelles ou possibles des éléments individuels qui la composent. Nous ne demandons rien au delà. S'il en est ainsi, le mouvement en soi existe nécessairement, et il doit être parfaitement déterminable, sinon pour nous qui vivons emportés dans le tourbillon du relatif, du moins en soi et au regard de l'éternelle pensée qui le conçoit et le réalise. La raison en est bien simple. Dans un système où tous les rapports sont exactement définis par le nombre même des particules ou des unités intégrantes, il est absolument inintelligible qu'un changement quelconque intervienne, sinon d'après des lois précises et dans une mesure rigoureusement déterminée : nulle place pour l'indéfini, qui n'est au fond que l'arbitraire, ni pour le relatif, qui n'a de raison d'être que dans un enten-

dement borné et imparfait comme le nôtre. Dire que dans le monde en soi toutes les relations possibles ou éventuelles sont calculables, parce qu'elles relèvent du nombre, et affirmer d'autre part que le mouvement en soi est absolument indéterminé, c'est se contredire formellement.

Si le mouvement absolu est autre chose qu'une illusion, s'il existe véritablement et est déterminé en lui-même, nous sommes conduits, par voie de conséquences logiques et par analogie avec les quantités précédentes, à affirmer les propositions qui suivent :

1° Le mouvement en soi ne saurait être continu, car il a pour théâtre le lieu réel qui ne peut être conçu que comme discontinu.

2° S'il n'est pas continu, il enferme de toute nécessité des temps d'arrêt ou des repos. Il ne se produirait donc que par intervalles ou par saccades, et par suite il est supposable que, si notre œil pouvait atteindre jusqu'à l'obscure région des éléments, il apercevrait, même au sein du mouvement le plus rapide, des repos analogues à ceux de l'aiguille qui, sur un large cadran, ne nous paraît passer de seconde en seconde, que par secousses brusques et répétées.

3° Le mouvement que nous voyons ou que nous imaginons n'est déterminé pour nous que par ses limites ; l'intervalle franchi ou à franchir reste incertain ; nous nous le représentons donc comme indéfini, quelle que soit la distance qui sépare les termes extrêmes du mouvement. — Une telle fiction, indispensable à notre ignorance, n'a plus de sens dans la sphère du mouvement en soi ; ici, tout est nécessairement déterminé, intervalles et limites ; chaque distance doit être rigoureusement mesurée à l'aide de ces unités naturelles qui, dans le lieu, sont le décalque exact des éléments dynamiques.

4° Par suite d'associations habituelles, l'idée d'intervalle se trouve si étroitement liée dans notre esprit à l'idée de mouvement, qu'entre les deux termes du mouvement, l'un initial, l'autre final, si rapprochés qu'on les suppose, nous imaginons

toujours une distance sans la déterminer jamais. — Cette convention est, au point de vue de la réalité, inacceptable; une distance en effet est un intervalle qu'il faut franchir; or une distance composée à l'infini de limites et d'intervalles toujours nouveaux, ne saurait être franchie à aucun moment. Il faut donc, si la distance en soi est susceptible d'une juste mesure, que, de division en division, le mouvement rencontre les couples élémentaires, puis les éléments. Il faut que la distance se résolve en *minima* qui ne sont que les unités de lieu.

5° Vu du côté phénoménal, le mouvement nous semble plus ou moins rapide. Encore une illusion que nous devons écarter, si nous regardons comme certains les principes posés plus haut. En effet, le mouvement en soi ne se comprend que sous la forme du passage ou de la transition d'un point à un point contigu du lieu : or il est de toute impossibilité que cette transition s'effectue en un temps plus ou moins long, car, s'il s'écoulait plus d'un instant dans le passage, le point à atteindre serait franchi. En conséquence, dans l'absolu, non seulement le mouvement doit se ressembler toujours à lui-même, mais encore il est nécessaire qu'il se produise dans l'instant. Comment alors expliquer l'apparence ? Quelle peut être dans le mouvement en soi la raison des divers degrés de vitesse? Une seule hypothèse est possible; elle s'impose. Puisque le mouvement apparent est fait de mouvements et de repos, comme le corps sensible de corpuscules et de vides, et que d'autre part le repos seul peut varier, on ne saurait expliquer les divers degrés de la vitesse phénoménale que par des degrés correspondants de lenteur réelle, et il faut chercher, dans la durée plus ou moins longue des stations du mobile, le moyen de différencier le mouvement. Le *summum* de la rapidité, s'il est atteint, correspondrait, dans cette donnée, au cas où les repos successifs atteindraient leur minimum; le *minimum* de vitesse, au contraire, se confondrait avec le repos sans fin ou le repos absolu. Entre ces deux limites s'échelonneraient des degrés

de vitesse en nombre inimaginable, tels néanmoins que chacun d'eux serait mesuré, en nombre exact d'instants, par la durée plus ou moins longue des repos.

Pour fixer nos idées, imaginons deux points contigus *a* et *b*. Comme nulle distance ne les sépare, la transition de l'un à l'autre ne saurait se produire selon les lois du mouvement relatif, tel qu'il nous est représenté; car dans le cas présent nous ne voyons nul intervalle à franchir. — Se mouvoir, au sens ordinaire du mot, c'est traverser un certain nombre d'intermédiaires; or ici, précisément, tout intermédiaire fait défaut. Le mouvement élémentaire conçu en soi diffère donc du mouvement apparent, comme les éléments de l'étendue et de la durée, des composés où ils entrent; le parallélisme se continue entre toutes ces quantités analogues. A l'origine, et lorsque l'intervalle manque, il faut bien que le mouvement échappe à la durée; il se produit alors dans l'instant indivisible ou absolu; à une durée nulle répond, comme il est naturel, une distance nulle. Au contraire, il est inintelligible qu'une distance, si petite qu'on la suppose, ne soit pas franchie en une durée, car on ne saurait admettre qu'un mobile inétendu occupe simultanément plusieurs points de l'espace; si l'intervalle minimum est parcouru en un temps court, la mesure du mouvement sera rapide; dans le cas contraire, elle sera lente : mais la durée d'un mouvement autre que le mouvement élémentaire ne se condensera jamais en un instant, tout intermédiaire exigeant un repos, et tout repos un instant distinct des autres.

Pour quelles raisons la mécanique rationnelle se fait-elle du mouvement une idée autre que celle que, de déductions en déductions, nous sommes amenés à regarder comme la seule vraie, c'est ce qu'il semble superflu d'expliquer, les considérations que nous aurions à faire valoir étant analogues à celles que nous avons déjà exposées à propos du lieu et de la durée. Une indication rapide suffira. Nos sens étant incapables de démêler les repos successifs qui entrent dans la composition du mouvement, il arrive qu'un nombre incalcu-

lable de mouvements et de repos se trouve représenté en bloc à la vue sous l'apparence de la continuité. L'imagination s'attache à ce symbole; l'entendement l'accepte et l'introduit, moyennant certaines réserves, dans la science; à l'idée de continuité en effet il attache l'idée d'indétermination qui la corrige en la rappelant à son origine véritable. Rien de plus correct au point de vue phénoménal où la science se place, la grandeur, quelle qu'elle soit, devant rester pour nous indéterminable dans ses éléments constitutifs.

L'analyse que nous venons de tenter jettera peut-être quelque lumière sur l'un des plus curieux paradoxes qu'ait formulés Zénon d'Elée, en vue de démontrer l'impossibilité du mouvement en soi. Le voici sous la forme rigoureuse que nous a transmise Aristote, avec l'argument lui-même :

Si toujours une chose est en repos quand elle est dans un espace égal à elle-même,

Et si toujours un mobile est à chaque instant dans un espace égal à lui-même :

La flèche qui vole est immobile [1].

L'auteur de la *Physique* (liv. VI, 1 et 14) ne regarde cet argument comme valable que si l'on admet l'existence d'instants indivisibles et discontinus. Il croit que la continuité, en introduisant la divisibilité à l'infini, supprime la contradiction attachée à la succession de moments distincts. Ce qu'il s'agit d'expliquer, en effet, c'est la transition d'un point à un autre. Si le mouvement est un passage, comment peut-il s'effectuer dans l'hypothèse du discontinu ? Vous résolvez l'intervalle en points α β γ δ : vous ne concevez plus dans le mouvement que des temps d'arrêt ou des repos, que vous appelez successifs, sans parvenir à expliquer comment ils se succèdent. Telle est la pensée d'Aristote. — A notre sens, le philosophe se méprend sur la valeur de l'hypothèse qu'il adopte; la continuité qu'il invoque est mortelle au mouvement. Faut-il rappeler que le continu est formé d'intervalles et de limites en

1. Voir Renouvier, *Log.*, t. I.

nombre indéfini et que par suite on ne saurait le franchir que dans un temps indéfini lui-même, c'est-à-dire sans bornes assignables? — D'ailleurs indéfini veut dire indéterminé, et l'on n'a pas le droit de regarder comme indéterminée en soi une série donnée de positions dans l'espace réel. — Dans le cas enfin où l'hypothèse de la continuité expliquerait le mouvement de la flèche, il faudrait, ainsi que le fait très judicieusement remarquer M. Renouvier, être conséquent avec soi-même, et l'introduire dans la discussion de l'Achille; ce qui fermerait la voie à toute solution. Nous croyons pour notre part que c'est dans le continu que l'impossibilité existe; dans le discontinu, elle n'est qu'apparente; nous allons essayer de le montrer.

Attachons-nous à la formule même de Zénon. Son argument repose sur une double hypothèse. Faut-il accepter comme certaine celle qu'il énonce la seconde? — Nul doute. — Un mobile doit être à chaque instant dans un espace égal à lui-même : supposer le contraire, c'est admettre implicitement, ou que quelques-unes de ses parties n'ont pas de place, ce qui est absurde, ou que certaines d'entre elles occupent plusieurs places à la fois, ce qui est également inintelligible. L'autre hypothèse mérite un examen attentif et approfondi. Il s'agit de savoir si une chose est toujours en repos quand elle est dans un espace égal à elle-même. — Au point de vue du mouvement apparent et phénoménal, oui sans doute, et l'argument paraît sans réplique; au point de vue du mouvement en soi, c'est autre chose. — Expliquons-nous. — Le mouvement que nous nous représentons est, je suppose, le mouvement phénoménal : — les instants qui le mesurent sont alors pour nous des infiniment petits de durée, durables néanmoins, de telle sorte que, si courts qu'on se les figure, il faut que dans l'un quelconque d'entre eux le mobile occupe plusieurs points différents de l'espace. A sa limite, le mouvement phénoménal ne se conçoit donc plus que sous la forme d'une prise de possession simultanée, et, si c'est là le mouvement, l'esprit ne peut plus définir le repos que par la nécessité d'oc-

cuper à chaque instant une place égale à soi-même, ce qui donne gain de cause à l'argument. — Dans la supposition du mouvement en soi au contraire la proposition de Zénon est inacceptable. — Si, à chaque instant de la durée, le mobile occupe un point nouveau de l'espace, il est à chaque instant dans un espace égal à lui-même, et cependant il se meut; c'est qu'il n'a jamais aucun intervalle à franchir, c'est que nulle part nous ne le surprenons en l'air entre deux points, même infiniment rapprochés; il n'a donc nul besoin de s'étendre comme tout à l'heure, de se dilater au gré de notre imagination, ou plutôt de se dédoubler lui-même en occupant simultanément, pour avancer, plusieurs points de l'espace.

Mill a examiné l'argument qui nous occupe, et qu'il présente après Diodore Kronos sous une autre forme. Laissons-le parler lui-même :

« Si un corps se meut, dit-il, il doit, d'après le sophisme connu et répété tant de fois depuis, se mouvoir, ou bien à la place où il est, ou bien à la place où il n'est pas; mais l'un et l'autre sont impossibles; — donc il ne peut se mouvoir. — Avant tout, cet argument, lors même que nous serions incapable de le réfuter, ne montre pas qu'il y ait dans l'*idée* du mouvement la moindre contradiction. Nous ne concevons pas un corps en mouvement à la place où il est, ni à la place où il n'est pas, mais nous le concevons allant de la première à la dernière : en d'autres termes, nous concevons que le corps est à la première place et à l'autre en des instants successifs. »

Cette manière un peu sommaire et hautaine de trancher la question, est loin de supprimer la difficulté véritable. Quelle est, en effet, l'hypothèse intermédiaire qu'on nous propose? Le corps dit-on, se meut d'une place à une autre. — Mais il ne peut le faire sans franchir un intervalle, et cet intervalle est lui-même une place où il doit se trouver quand il le franchit : nous voilà impitoyablement ramenés à l'une des deux hypothéses de Diodore : *sub cultro linquimur*. Il faut dire alors que le corps se meut là où il est, et, dans cette hypothèse,

comment avance-t-il? — On peut, à la vérité, subdiviser un tel intervalle. — A ce nouveau point de vue, de deux choses l'une : ou bien on le fractionne en intervalles toujours renaissants, ou bien on le résout en indivisibles. La première supposition qui répond au mouvement phénoménal, en multipliant les intervalles, ne fait que multiplier la difficulté par elle-même; il faut donc que la seconde, qui répond au mouvement en soi, soit seule légitime.

Qu'on imagine en effet un couple de points contigus. Le mobile, en passant de l'un à l'autre, avance : c'est déjà un résultat considérable, car toutes les précédentes suppositions le condamnaient au repos. — Mais à quel prix avons-nous obtenu cet avantage? On nous objecte qu'un tel mobile se meut là où il n'est pas [1]. Cette formule enferme une équivoque; il faut distinguer la cause de l'effet, l'impulsion du mouvement. Le mobile subit l'impulsion là où il est, et aussitôt l'impulsion se traduit au dehors, s'épuisant en quelque sorte dans le mouvement de transport qui place le mobile là où premièrement il n'était pas. Je dis aussitôt, car un tel mouvement, dans la réalité des choses, n'a pas de durée; on ne saurait y distinguer par la pensée ni commencement ni fin, parce qu'il ne répond à aucun intervalle, parce qu'il n'implique aucune distance à franchir [2].

Quelque étrange que puisse paraître au premier abord cette proposition, le mobile doit bien plutôt se mouvoir là où il est, si le mouvement en soi est instantané. — Il passe, je suppose, du point *a* au point contigu *b*. — Lorsqu'il atteint *b*, ce n'est pas, comme on l'imagine, par suite d'associations habituelles devenues presque invincibles, après s'être mû, c'est en se mouvant ; en d'autres termes, l'instant précis où le mouvement se produit, se trouve être l'instant même où le mobile rencontre le but. Dans l'absolu et à la limite, fin et moyen coïncident. Disons donc qu'un corps quelconque est toujours

1. Etant en A, par exemple, il se meut en B.
2. En effet ce n'est pas *une distance*, mais un élément de distance minimum que franchit alors le mobile.

au point où il se meut; comment pourrait-il en être autrement? Ajoutons qu'entre le mouvement et le repos une seule différence subsiste, mais essentielle. — Le mobile est en repos. — Il est là où il est et où il a été. — Il est en mouvement. — Il est là où il est et où il n'était pas encore avant que le mouvement se fût produit.

Concluons :

Un mobile est-il, à chaque instant, dans un espace égal à lui-même?

Personne ne peut le nier.

Un mobile, quand il est dans un espace égal à lui-même, est-il en repos?

Tantôt en repos, tantôt en mouvement, selon qu'il a ou n'a pas été précédemment dans le même espace.

Que dire alors de la flèche qui vole?

Puisque vous supposez qu'elle vole, vous supposez que, d'étape en étape, elle est toujours là où elle n'était point antérieurement, et par la définition qu'on vient de donner du mouvement, vous déclarez vous-même qu'elle se meut.

Il importe de remarquer, en terminant, que la raison d'être du mouvement, la source vive où il s'alimente, c'est la force, qu'il ne faut ni séparer, ni même distinguer par la pensée du mobile. L'être qui se meut, vivante énergie, est à la fois le mobile et le moteur. Ainsi se simplifie le système des choses dans l'absolu; ainsi disparaissent peu à peu, même de la science, ces ridicules agents destinés à communiquer l'impulsion à la matière. Le mouvement est naturel à l'être; il lui est inné, avec les alternatives de repos qui le différencient quant à la vitesse, et qui résultent sans doute, comme autant d'états d'équilibre momentanés, de la réaction des énergies rivales [1].

1. Ces alternatives nécessaires de repos permettent, selon nous, de résoudre d'une façon très simple le problème de l'Achille. La marche de la tortue étant plus lente que celle d'Achille, les repos doivent être plus longs; il est donc tout naturel que, pendant l'un de ces repos, Achille l'atteigne et la dépasse. — On se demande s'il ne serait pas possible d'expliquer par la même hypothèse, *outre les phénomènes du choc, les vibrations qui en résultent* (voir notre étude latine sur Boscowich, 3e partie).

En dernière analyse, la quantité réelle, qu'elle se nomme étendue, durée ou mouvement, est déterminée en elle-même et se conçoit nécessairement comme finie. Ce n'est que dans l'abstrait et au point de vue de l'intelligible pur qu'on a le droit de parler de l'infini; encore un tel infini, toujours en voie de devenir, mériterait-il un autre nom.

Aristote, dont la pensée peut paraître indécise dans le détail, lorsqu'il traite du sujet qui nous occupe, conclut avec sa précision ordinaire en exprimant l'opinion suivante, que nous adoptons sans réserve [1] :

« A qui demande s'il est possible de traverser les infinis, soit dans la durée, soit dans la longueur, il faut répondre : en un sens, oui; en un autre, non. S'il s'agit de la réalité, c'est impossible, mais c'est possible s'il s'agit de la puissance. Le mobile qui se meut d'un mouvement continu traverse l'infini, mais d'une façon relative; absolument, non; c'est ainsi qu'il arrive à la ligne d'admettre des moitiés à l'infini; sa réalité, son essence est pourtant tout autre.

« Le changement, ajoute-t-il, n'est compatible ni avec l'indéterminé ni avec le continu [2]. »

1. Λεκτέον πρὸς τὸν ἐρωτῶντα, εἰ ἐνδέχεται ἄπειρα διεξέλθειν, ἢ ἐν χρόνῳ, ἢ ἐν μήκει, ὅτι ἔστιν ὥς, ἔστι δ'ὡς οὔ. — Εντελεχέιᾳ μὲν γὰρ ὄντα οὐκ ἐνδέχεται, δύναμει δ'ενδέχεται. Ὁ γὰρ συνεχῶς κινούμενος, κατὰ συμβέβηκος, ἄπειρα διέξῆλθεν, ἁπλῶς δ'οὔ. Συμβέβηκε γὰρ τῇ γραμμῇ ἄπειρα ἡμίσεα εἶναι, ἡ δ'οὐσία ἐστὶν ἑτέρα καὶ τὸ εἶναι. (*Phys.*, liv. VIII, ch. VIII [XII].)

Οὔτ' ἄπειρος ἐστὶ μεταβολὴ οὐδεμία οὔτε συνεχής. (Même livre, même chapitre, à la fin.)

2. Aristote excepte de cette loi le mouvement circulaire. On peut se demander d'ailleurs s'il est possible dans l'absolu.

CHAPITRE III

L'IDOLE DE L'INFINIMENT GRAND ET LA QUANTITÉ EN SOI

UNIVERS. — ESPACE. — TEMPS ET MOUVEMENT.

1° Univers.
Deux hypothèses. — Création immédiate. — Création progressive. — Dans les deux cas, l'infinité de l'univers implique contradiction.
2° L'espace, réel ou objectif, ne peut être, dans l'hypothèse du plein, que coétendu aux choses. — Dans l'hypothèse plus vraisemblable du vide, il doit être conçu comme la synthèse des traces actuelles ou possibles de chacun des éléments qui se meuvent dans l'univers. — Quelque supposition qu'on adopte, l'espace réel reste nécessairement fini.
Stuart Mill et le voyage idéal au bout de l'espace réel. — Il ne reste, lorsqu'on est parvenu au terme, que le besoin de l'au-delà, né de liaisons empiriques et subjectives. — Part de vérité qu'enferme l'associationisme.
Différence entre l'espace réel et l'espace pur. — Si l'espace pur n'est pas une forme *à priori* de la sensibilité, c'est du moins une notion toute subjective. — Sa parenté étroite avec l'esprit qui l'engendre, aperçue et mise en lumière par Kant. — Que l'espace pur soit une *première forme* ou un *dernier abstrait*, la théorie qu'on doit en faire est la même, parce qu'il n'est plus dans l'un et l'autre cas qu'une loi de l'esprit. — Les deux métaphysiques en sens inverse, l'une objective, l'autre subjective, d'Aristote et de Kant.
Thèse.
a. Bien qu'il dépasse toute conception actuelle, l'espace pur n'implique aucun élément étranger à la pensée.
b. L'espace pur n'est pas, pour cette seule raison qu'il dépasse toute multiplication idéale, rigoureusement infini.
3° Temps et mouvement.
Conclusions analogues en ce qui concerne le temps et le mouvement. — Ce qu'il faut penser du temps vide et du mouvement éternel.

Il existe, dans la série des divisions dont elle est susceptible, une limite où la quantité réelle expire; telle est du moins la solution que nous imposent d'essentielles exigences

de la pensée. Faut-il croire, par analogie, qu'au sens de la multiplication la même quantité doit subir une loi semblable, ou peut-elle au contraire, libre dans son essor du côté de l'immensité, grandir de progrès en progrès jusqu'à l'infini? Ce problème, symétrique au premier, nous ouvre, sur un terrain déjà aplani, de plus vastes horizons.

Au point de vue du développement de la grandeur, les quantités que nous venons d'étudier prennent avec une physionomie nouvelle des noms nouveaux. La matière, le lieu, la durée deviennent l'Univers, l'Espace et le Temps sans bornes. Si l'absolu de la grandeur existe, elles en représentent les divers aspects.

I

L'univers.

Entre l'univers dans son ensemble et ce monde en réduction que peuplent d'obscurs éléments, entre le *macrocosme* et le *microcosme*, il n'existe, ce semble, qu'une différence d'échelle; les rapports restent les mêmes, le cadre seul s'est agrandi. Au lieu d'atomes, des mondes, et pour représenter l'organisation progressive de la matière, des systèmes superposés et toujours plus vastes de planètes, de soleils, de nébuleuses. L'imagination s'élance au delà encore. Qui sait si cette grandeur qui nous étonne est le dernier mot de la nature? Ne peut-on supposer, au delà de l'univers visible, d'autres univers inconnus de nous, et étagés de telle sorte que chacun d'eux, démesurément vaste en comparaison de celui qui le précède, soit pour lui ce que l'infini est pour le néant?

Cependant, si la pensée pénètre la réalité des choses, si « l'auguste et sainte intelligence » rayonne dans l'œuvre qui s'offre à nos yeux, nous n'hésitons point à le dire, une telle conception n'est qu'un rêve. Le monde n'est point une contradiction vivante. Dans le règne de la grandeur concrète, ce

qui existe, au regard de la raison, ne peut être que nombré, et ce qui est nombré ne peut être que fini.

Comment, en effet, se représenter l'univers? Est-ce un long et incessant devenir ou une réalité achevée? La nature produit-elle successivement ses créations dans la durée, ou faut-il admettre qu'à l'origine et une fois pour toutes, elle ait répandu dans l'immensité de l'espace les éléments innombrables dont elle dispose? Quelque supposition que l'on fasse, qu'on croie avec le panthéisme de tous les âges que le monde n'est qu'un perpétuel progrès, ou qu'on lui accorde une existence pleine et immobile, la conclusion reste la même : la loi du fini s'impose à l'entendement comme une absolue et invincible nécessité.

Examinons chacune de ces hypothèses. Le penseur qui s'attache à la première ne se contentera pas d'admettre qu'il existe des mondes en voie de formation, mondes dont les éléments dispersés s'agrégeraient peu à peu d'après des lois définies : il affirmera qu'ils émergent sans cesse du néant à l'être; il ne croira pas seulement au fait d'une évolution progressive, évolutiou telle que de complication en complication l'hétérogène sorte de l'homogène, la vie de l'organisation, l'intelligence de la vie; il soutiendra que le changement atteint, par delà le phénomène, la réalité; témoin de ces combinaisons éphémères qui produisent et font disparaître à tout moment les formes variées de l'existence, il dira sans doute avec les vieux sages que c'est là « le jeu de Jupiter; » mais il ajoutera aussitôt que « Jupiter, » en multipliant les acteurs, étend chaque jour le théâtre où se déploie son génie, et, curieux de montrer à l'œuvre cette main invisible, il alléguera les mondes produits tout à coup à la lumière, multiplicité confuse d'abord, mais qui se débrouille peu à peu et se résout lentement en pléiades distinctes de soleils.

Qu'une semblable supposition soit ou non compatible avec les données de la science contemporaine, c'est ce que nous n'avons pas la prétention de décider. Nous ne savons ni ne voulons savoir si ces apparitions soudaines sont dues au long

voyage des rayons lumineux ou à des créations véritables. Nous passerons même condamnation, si l'on veut, sur ce principe de la conservation de l'énergie, qui, entrevu par Descartes, indiqué par Leibniz, s'est peu à peu fixé dans la science, et semble devoir lui demeurer acquis à titre de postulat. Au point de vue où nous sommes, qu'importe en effet que la quantité de matière soit ou ne soit pas constante dans le monde, et que certaines inductions expérimentales, fondées il est vrai sur des faits précis, aient ou n'aient pas, en dehors de notre étroit système, la portée absolue qu'on leur prête! Allons plus loin : consentons à ne point voir ce qu'a d'étrange cet enfantement successif des choses pour qui, cherchant la réalité au delà du phénomène, conçoit la pensée créatrice sous la forme immuable de l'éternité. Ces concessions faites, dirons-nous que l'univers qu'on nous propose est véritablement infini? Qu'est-ce donc que cet être qui devient sans cesse, sans se réaliser jamais? L'analyse y démêle deux éléments : au fond, une puissance indéfinie de progrès; à la surface, des réalités en nombre toujours croissant, apparaissant comme autant de couches successives à chaque heure de la durée; où trouver en tout cela l'infini? Les réalités, alors même qu'elles se multiplieraient sans cesse, ne sont-elles pas données à chaque moment? Elles sont donc, à chaque moment, en nombre fini. Quant à la puissance qui les crée, c'est une puissance impuissante qui aspire toujours à l'absolu sans jamais l'atteindre.

L'hypothèse qui se fonde sur la persistance de la force pour affirmer que tout ce qui doit exister existe, et que le monde est actuellement infini, offre évidemment moins de prise aux objections de la science expérimentale, mais elle succombe d'abord sous celles de la logique. L'univers est composé de parties distinctes; il est donc soumis à la loi du nombre; mais, d'autre part, il est, par hypothèse, infini; le nombre de ses parties doit donc être infini lui-même. Flagrante contradiction. Dira-t-on, pour s'y soustraire, que dans les sciences abstraites le nombre infini se conçoit très net-

tement comme supérieur à tout nombre donné? Outre qu'il ne s'agit, dans le cas dont on parle, que d'une infinité relative [1], l'abstrait est le domaine propre de la notion qu'on essaye, contre toute raison, d'introduire dans l'étude de la nature. Puisque le monde existe, il faut que le nombre de ses parties soit réalisé, et dès lors, comment soutenir que ce nombre soit supérieur à tout nombre quel qu'il soit?

L'univers ne peut être pensé que comme fini. Cette conclusion, il faut bien le reconnaître, heurte de front des croyances instinctives qui, fondées ou non, ne se laissent que difficilement entamer. L'affirmation d'un monde limité dans l'espace, outre qu'elle trouble l'imagination rebelle à l'idée de limite, soulève, même au point de vue rationnel, des difficultés assez graves pour que le père du criticisme ait cru pouvoir les mettre en balance avec l'impossibilité radicale du nombre infini. La principale d'entre elles, ou pour mieux dire l'unique, car les autres s'y ramènent aisément, a sa racine dans le principe de raison suffisante dont Leibniz fit l'arme de sa philosophie et au nom duquel il attaqua lui-même les partisans d'un monde fini. Pourquoi, demande-t-on, telle borne plutôt que telle autre? Pourquoi tel lieu choisi dans l'espace, à l'exclusion d'un nombre incalculable d'autres lieux possibles? Comment le vide absolu peut-il servir de limite au monde, et par quel miracle oppose-t-il une résistance efficace à son progrès? Quels rappports sont possibles entre l'être et le non-être, la réalité et le néant? A quelle distance faut-il imaginer que nous soyons de l'espace enveloppant, et, si cet espace est sans bornes, où sommes-nous, comment vivons-nous, noyés dans une immensité vide, qui semble devoir offrir à l'être un réceptacle infini, mais qui ne lui laisse en réalité aucune place, aucune n'étant *à priori* préférable et par conséquent éligible?

On a quelquefois tenté de répondre en invoquant l'ingénieuse théorie des mondes semblables.

1. Voir les deux chapitres relatifs à la grandeur mathématique.

L'imagination, ainsi que l'a fort bien vu Laplace [1], ne connaît que des rapports; on peut donc, sans inconvénient, supposer que les dimensions des corps croissent ou diminuent en même temps que la longueur des distances qui les séparent et la rapidité des mouvements qui s'y produisent; rien dans ces mondes successifs ne nous paraîtra changé si les relations des choses entre elles demeurent identiques. A un pareil point de vue, demander pourquoi notre univers est borné ici plutôt que là, ce serait ne pas s'entendre soi-même, car les mouvements que voient nos yeux et que le calcul mesure sont indépendants des dimensions absolues de la réalité; nous pouvons, à notre gré, les étendre, sans que l'imagination proteste ou que l'expérience soit en défaut; le monde en soi, bien que fini, devient alors aussi grand que la pensée le désire, et nous voyons sans cesse reculer devant nous l'espace vide sur lequel se fonde toute l'objection.

Hâtons-nous de le dire, une telle solution n'est qu'apparente; elle ne vaut que dans la sphère du relatif. Lorsque, laissant de côté le phénomène, on s'attache à la réalité des choses, on comprend bien vite que des dimensions absolues doivent être telles ou telles, et que, s'il est toujours loisible à l'entendement de les diminuer ou de les accroître pour expliquer l'apparence sensible, une telle opération n'affecte que nous-mêmes et laisse intacte la grandeur concrète. Un monde dix fois, cent fois plus grand que le nôtre, peut paraître toujours semblable, si les rapports des êtres entre eux n'ont pas changé; mais dans la réalité il serait autre, les termes qui constituent ces rapports n'étant plus les mêmes. Et rien ne s'explique mieux. L'unité de mesure qui manque et manquera toujours à la science, existe dans la nature, et cette unité n'a rien d'arbitraire. *C'est le couple de contigus qui marque la trace de deux éléments dynamiques liés l'ún à l'autre sans intervalle.* Un tel couple, disons-nous,

1. Laplace, *Exposé du système du monde*, liv. IV, ch. XVII.

est une grandeur fixe, car les deux unités de force auxquelles il sert de points d'attache sont des unités naturelles, toujours et nécessairement les mêmes, puisqu'elles sont indivisibles, dans tous les mondes imaginables. On peut ajouter que c'est là le minimum de l'étendue possible, minimum répété un certain nombre de fois dans un monde donné, quelle que soit la convention que l'on fasse ou l'échelle de proportion qu'on adopte, pour obtenir une évaluation relative de sa grandeur.

Le problème, dans l'absolu, reste donc intact; mais aussi, dans l'absolu, ce n'est plus à l'imagination à le résoudre. Il n'est vraiment redoutable, on va le voir, que parce qu'il froisse d'opiniâtres préjugés. — On demande pourquoi telle limite a été imposée à l'univers et non telle autre. — Pour une raison aussi simple que décisive; l'univers ne peut échapper à la contradiction que s'il est borné, or, s'il est borné, il faut bien que la borne où il expire soit fixe, autrement, elle ne serait pas. — On ne voit pas pourquoi la borne supposée fixe serait ici plutôt que là. — Quoi de plus naturel? Nous ne savons le tout de rien; il ne faut pas confondre ce qui répugne à l'entendement et ce qui le passe. Pour répondre à une semblable question, il faudrait sortir de l'enceinte des choses créées et pénétrer jusqu'au fond de la pensée créatrice; n'est-ce pas là une ambition déraisonnable? — On ne s'explique pas quelle résistance l'immensité vide oppose à la réalité concrète; on demande pourquoi et comment le néant limite le progrès de l'être et arrête son expansion. — Question mal posée et qui n'est intelligible que si l'on admet implicitement que le monde a en lui-même la raison de son existence; vous ne pouvez vous représenter comme limité un être qui, possédant la source de l'être, ne rencontrerait en dehors de lui aucun obstacle. Soit; mais le monde est-il l'être dont vous parlez? Comment l'établir? Si ce qui est multiple est relatif, le monde n'est pas borné du dehors, ce qui serait inintelligible, mais du dedans; il est limité par sa définition même, c'est-à-dire par sa nature divisible et contingente.

L'objection que l'auteur de la *Critique* se pose à lui-même dans l'antinomie connue, est analogue et prête également le flanc. Quels rapports l'univers entretient-il avec l'espace qui l'entoure? — Aucun, les rapports n'étant possibles qu'entre des êtres réels, et la totalité des êtres étant épuisée avec l'univers. — Fidèle à l'esprit de sa doctrine, Kant conçoit *à priori* ce qu'il nomme l'espace pur; il le déploie comme une toile immense jusqu'à l'infini et cherche ensuite à y tracer la circonscription du monde. Leibniz ne pensait guère autrement lorsqu'il imaginait, ne fût-ce qu'un instant et dans l'intérêt de sa thèse, un Dieu irrésolu, face à face avec les parties préexistantes d'une étendue toujours et partout identique à elle-même. Faut-il rappeler que ce fond incolore et uniforme de l'être, c'est la faculté sensible qui le rêve; que cette trame, sans métier pour la recevoir, sans fils pour la tisser, c'est l'imagination qui de sa propre substance la tisse elle-même, œuvre vaine d'un fantastique ouvrier? On objecte qu'à d'autres mondes purement possibles doit répondre dans la pensée créatrice l'idée d'un espace possible comme eux. Nous répondons que cette possibilité est illusoire et purement subjective. La possibilité véritable, on l'a bien dit, ne saurait être affranchie de la considération des conditions mêmes du possible. Si le monde est enfermé dans des limites déterminées, ce ne peut être que pour une raison décisive aux yeux de l'Etre qui ne doit rien à la fantaisie ni à l'arbitraire, et cette raison, quelle qu'elle soit, exclut précisément la possibilité de tout au delà. Qu'on parle donc, l'espace réel épuisé, non d'espace possible, ce serait un non-sens, mais d'espace idéal : la possibilité qu'on allègue n'est, on le verra tout à l'heure, qu'une possibilité de convention, une simple loi de l'entendement projetant hors de lui-même et sans fin ses représentations une fois données. A ce point de vue, mais à ce point de vue seulement, la thèse de Kant nous paraît d'une vérité profonde, saisissante. L'espace pur, l'espace intelligible (nous ne parlons pas d'un autre) n'est qu'une forme de la sensibilité humaine ; ce n'est qu'une vision intérieure,

un rêve, le long rêve de nos veilles, que la raison ne parvient pas toujours à dissiper.

On le voit, dans l'infiniment grand comme dans l'infiniment petit, la raison demeure d'accord avec elle-même ; elle ne se dément jamais. Qu'elle conçoive l'immense univers ou l'invisible atome, elle reste invinciblement attachée à cette formule : ce qui est donné dans le domaine de la grandeur n'est et ne peut être que fini.

II

L'espace et les autres quantités.

Par conviction ou de guerre lasse, un partisan de l'infini peut céder sur la question de l'infinité du monde ; mais il semble que, s'il s'enferme dans la théorie de l'espace, il y soit comme dans une place forte, soutenu à la fois par la solidité de sa cause et la faveur de l'opinion. Quiconque prétend que l'espace est infini a d'avance pour allié le sens commun. Ce que vaut un tel allié nous le savons, mais nous savons aussi quels obstacles il a suscités à la science : orienté vers le phénomène, il ne nous montre presque jamais que la réalité renversée; cette fois encore, le sens commun se trompe et nous trompe; c'est ce qu'il sera aisé de faire voir.

Notre premier souci doit être d'écarter tout malentendu. L'espace s'offre à nous sous deux aspects très différents, tantôt comme réel, tantôt comme imaginaire. Dans le premier cas, il nous est représenté comme le lieu du monde ; dans le second, comme le réceptacle idéal d'une foule d'autres mondes possibles : ici, il semble avoir sa raison d'être hors de nous, dans les corps qui l'habitent ou dans les sphères qui le peuplent ; là, au contraire, il paraît ne plus dépendre que de la faculté que nous avons de concevoir sans fin ce que nous avons déjà perçu. Cette distinction, plus d'une fois esquissée, mérite d'être approfondie. Les deux notions que nous opposons l'une à l'autre, sont aussi différentes que *le dehors* du

dedans, l'*objet* du *sujet ;* nous nous proposons donc d'établir que la quantité qui répond à la première, déterminée en elle-même, doit être finie, tandis que celle qui répond à la seconde, créée à plaisir par l'imagination, peut croître ou décroître à son gré, sans autre loi que la loi de l'indéterminé ou de l'indéfini, qui est celle de l'imagination elle-même [1].

Comment se représenter l'espace objectif? On ne saurait le concevoir en dehors du monde, puisque, par définition, il n'a de réalité que dans le monde, dont il est le lieu ; or le monde se prête à une double conception : on peut croire que la matière qui le compose est compacte, et qu'il est lui-même tout d'une pièce, c'est la vieille hypothèse du plein ; on peut admettre au contraire et avec plus de vraisemblance que la matière est discontinue dans l'espace, ce qui revient à dire que les parties qui la constituent sont séparées par des interstices, c'est l'hypothèse du vide. Selon qu'on adopte l'une ou l'autre, la notion d'espace objective prend une signification différente qu'il importe de déterminer exactement.

Admet-on l'hypothèse du plein, l'espace réel devient aussitôt pour la raison coétendu aux choses. Il n'est en effet que la somme des unités de lieu correspondant, chacune à chacune, aux unités dynamiques qui les occupent : or, dans la supposition où l'on se place, les unités dynamiques sont toutes contiguës et ne laissent entre elles aucun intervalle ; il faut donc que les unités de lieu soient toutes occupées, et il devient impossible de trouver, au point de vue de leurs

1. Rappelons qu'un certain nombre de philosophes ont expressément distingué ces deux points de vue. Il est vrai que tous n'ont pas attaché à cette distinction une fois faite une égale importance. On sait jusqu'à quel point elle est formelle et précise dans Aristote, qui trouve dans l'opposition de la puissance et de l'acte un principe de solution si fécond. Descartes paraît l'oublier. Leibniz, plus attaché à la tradition, l'aperçoit de nouveau, mais assez obscurément. Avec Kant au contraire, elle devient très nette, mais s'exagère au point de donner naissance à une opposition décidée et radicale entre les deux concepts. Hamilton, Mill, Spencer, qui, si indépendants à tant d'égards, suivent sur ce terrain les traces du grand critique, ne reprennent l'antinomie mathématique du fini et de l'infini qu'en se plaçant successivement aux deux points de vue que nous essayons de distinguer.

dimensions absolues, la moindre différence entre le lieu du monde et le monde lui-même. La conclusion qui s'en dégage est certaine, indéniable : le monde réel est fini; il est de toute nécessité que l'espace réel soit également fini.

A vrai dire, nous ne saurions attacher une sérieuse importance à l'hypothèse du plein, qui semble de jour en jour plus étrangère à la science. Descartes devait l'adopter : elle s'impose en effet à quiconque introduit dans l'étude de la matière la considération toute mathématique du continu [1]. Leibniz, pour des raisons spéciales, se rangea à l'avis de Descartes [2]; mais Newton et ses disciples renversèrent avec des faits cette fragile construction, et la science contemporaine s'est ralliée finalement à leur point de vue, en faisant de l'existence du vide l'indispensable condition du mouvement [3].

Supposons donc que le vide existe. Dans une semblable hypothèse, il n'est plus possible de soutenir que l'espace réel soit coétendu à la matière qui s'y trouve disséminée : on l'imagine plutôt comme une trame à la surface de laquelle se dessinent et se jouent de mobiles groupements d'atomes : tous les points ne sont pas occupés, mais tous peuvent l'être et le sont en effet successivement, car le mouvement dans l'ordre dispersé qu'on imagine se produit en tous sens et sous toutes les formes. A ce point de vue, si différent à certains égards du premier, on comprend que la conclusion reste la même : comme l'espace, en aucun point, ne déborde le monde, comme il n'est que la synthèse des traces actuelles ou possibles de chacun des éléments de la matière, il reste nécessairement fini.

Quelque hypothèse que l'on fasse, la loi du fini est donc la

1. On n'ignore pas que, sur ce terrain difficile, l'auteur des *Principes* eut à lutter péniblement contre les partisans mieux inspirés de l'atomisme épicurien, Hobbes et Gassendi entre autres.

2. Leibniz, toujours préoccupé de donner au monde une excellence et une perfection dignes de Dieu, n'osait y laisser pénétrer le néant sous le nom de vide.

3. Notons quelques exceptions illustres; comme cartésien, Bordas-Demoulin, et, comme mathématicien, Cournot, adoptent l'hypothèse de la continuité dans le réel.

loi invariable de l'espace déterminé en lui-même ou de l'espace objectif. C'est une conséquence que laisse entrevoir comme possible, sous une forme paradoxale, il est vrai, le grand logicien anglais Stuart Mill [1].

« Nous n'avons jamais perçu, dit-il, un objet ou une partie de l'espace, sans qu'il y eût encore de l'espace au delà, et, depuis le moment de la naissance, nous avons toujours perçu des objets ou des parties de l'espace : comment donc l'idée d'un objet ou d'une partie de l'espace pourrait-elle ne pas s'associer inséparablement à l'idée d'un nouvel espace au delà ? Chaque instant de notre vie ne peut que river cette association, et nous n'avons jamais trouvé une seule expérience tendant à la rompre. Dans les conditions actuelles de notre existence, cette association est indissoluble; mais nous n'avons pas raison de croire que cela tienne à la structure originelle de nos esprits : nous pouvons supposer que, sous d'autres conditions d'existence, il nous serait possible de nous transporter au bout de l'espace, et que, après y avoir pris connaissance de ce qui s'y trouve par des impressions d'une espèce tout à fait inconnue dans notre état présent, nous deviendrions à l'instant capables de concevoir le fait et de constater sa vérité; après quelque expérience de l'idée nouvelle, le fait nous semblerait aussi naturel que les révélations de la vue à un aveugle guéri depuis assez longtemps pour que l'effet d'une longue pratique les lui ait rendues familières. »

Ce voyage « au bout de l'espace » dont Mill nous entretient avec un accent d'aventureuse témérité qui fait penser au génie de sa race, la raison peut, dès l'existence présente, le faire à toute heure et impunément; il suffit de ne point gêner son essor. Pour cela, il faut écarter les fantômes que l'imagination lui présente, et mourir, si l'on ose dire, à ces associations fortuites et empiriques d'après lesquelles se règle le cours ordinaire de la vie. Même au point de vue purement spéculatif

1. *Philosophie de Hamilton,* trad. Cazelles, p. 94 et 95.

de la connaissance, il y a en chacun de nous deux hommes, oserions-nous dire avec le poète : l'un, plongé dans le monde des phénomènes, ne veut croire qu'à ce qu'il voit et à ce qu'il touche; l'autre, encore à l'état d'ébauche, mais destiné à toujours grandir, proteste contre l'opinion et crée la science, qui ne se fonde que sur les ruines du préjugé. — Ecartons toute métaphore. — La raison a ceci d'éminent dans notre infirme nature, qu'elle seule peut soulever un coin du voile qui nous cache la réalité des choses. Elle assiste, indépendante, à la naissance des liaisons empiriques avec lesquelles il nous faut vivre; elle les voit se fortifier par l'habitude; mais, sachant d'où elles viennent et ce qu'elles valent, elle leur refuse, à bon droit, toute portée objective. Que le sensible nous soit pratiquement utile, nul ne le conteste; mais au-dessus de l'action est la science pure, comme au-dessus de l'imagination la raison. La raison peut donc nous transporter aux confins de l'univers. Parvenue au terme, — et pour y parvenir un instant lui suffit, — elle reconnaît que le besoin de l'« au delà », ressort si utile avant que la limite soit atteinte, n'a plus d'objet lorsque tout « au delà » cesse; elle affirme donc que les bornes du monde doivent être aussi les bornes de l'espace réel, et, pour en décider ainsi, elle n'a nul besoin d'impressions d'un ordre nouveau; il lui suffit de demeurer fermement dans l'hypothèse où elle se place; alors elle voit sans peine que, là où les réalités expirent, les impressions doivent, à leur tour, disparaître, et avec elles les rapports idéaux qu'elles déterminent.

On s'explique néanmoins comment l'illusion de l'espace infini est possible. Nous confondons presque toujours l'espace réel et l'espace pur. Le premier, le seul qui mérite le nom d'espace, trouve sa raison d'être et sa forme propre dans la réalité étendue et divisible avec laquelle il fait corps, tandis que l'espace pur ne peut plus avoir d'autre forme que celle de la pensée qui le pénètre et qui l'absorbe. C'est l'espace pur qu'on déclare, *à priori*, infini et nécessaire; encore cette nécessité et cette infinité n'ont-elles,

nous espérons le faire voir, rien de rigoureux ni d'absolu [1].

L'espace, d'après l'auteur de la *Critique*, est nécessaire : c'est là, dit Kant, l'attribut essentiel qui le caractérise et le définit. Soit; mais de quelle nature est la nécessité dont on parle? — On soutient que rien ne peut être représenté à l'esprit que dans le cadre qu'une telle forme impose à l'intuition. — A ne tenir compte que de cette exigence de l'entendement, la nécessité de l'espace semblera purement hypothétique, car ce n'est que dans le cas où une représentation est donnée que la forme idéale de l'étendue paraît nécessaire. — On insiste : nous pouvons retrancher du champ de la vision intérieure une représentation quelconque, et néanmoins l'espace demeure; le dessin a disparu, le cadre est resté; les caractères se sont effacés, la tablette intérieure apparaît encore nue et rase, toute prête à en recevoir d'autres : comment nier le fait, et s'il existe, comment refuser d'admettre avec Kant qu'il s'agit bien cette fois d'une nécessité absolue? — Serrons de plus près le problème; fixons nos regards sur ce fond uniforme de l'espace que l'on prétend vide de toute apparence phénoménale. Qu'est-ce donc que ce cadre qui le circonscrit, et qui recule lorsque je l'étends? Qu'est-ce que ce prolongement de zones successives qui, s'élargissant toujours, s'enveloppent les unes les autres et marquent comme les bonds de ma pensée vers l'infini? Pourquoi, en deçà de ces fuyantes limites, le vague fourmillement de points si nombreux et si serrés qu'on dirait le tissu à demi visible d'une immense toile? Comment expliquer enfin que, sous peine de ne penser à rien en pensant à l'espace pur, je sois contraint d'y apercevoir des lignes, d'y distinguer des traces, d'y démêler des parties? N'en doutons pas, à l'insu du célèbre critique, la représentation sous une forme plus effacée et plus abstraite s'est glissée dans le champ de l'espace vide; ce n'est plus, il est vrai, que le spectre de la réalité, mais l'œil intérieur devine encore ses formes et

1. L'objet spécial de ce chapitre est l'espace réel; mais il nous semble difficile d'en donner une idée complète, si nous ne lui opposons l'espace pur.

entrevoit ses éléments : et rien n'est plus naturel. Se pourrait-il, ainsi que l'a fait observer Spencer, que l'espace fût à la fois condition et objet de conscience? S'il n'est qu'une forme intérieure, un instrument de la pensée, il ne saurait être pensé lui-même; s'il est, au contraire, véritablement représenté, il doit, comme tout objet de représentation, se dédoubler en matière et en forme, la matière n'étant autre que les traits de la réalité multiple et divisible conservés par la mémoire; la forme, que l'unité vivante de l'esprit reliant en un système d'étroits rapports les parties diffuses de la matière. Et qu'on ne dise pas que le dessin confus des choses apparaît au sein d'un espace vide déjà conçu en lui-même; nous en appelons à l'observation intérieure; un tel espace n'est conçu ni avant ni après quelque représentation que ce soit; il n'est absolument pas conçu. Pour donner prise à la pensée, il doit se résoudre en rapports; et les rapports eux-mêmes ne sont intelligibles que par les termes qui les constituent ou les points de repère qui les déterminent. Que faut-il conclure de là, sinon que la nécessité de l'espace idéal existe, mais n'est qu'hypothétique? Les relations qui le constituent ne sont pensées que sous la condition de certains « supports intelligibles, » nécessaires à ces relations elles-mêmes.

On suppose encore que l'espace pur est rigoureusement infini. Lorsqu'on veut le prouver, voici d'ordinaire comment on procède : Essayez, dit-on, d'épuiser par la pensée le vide immense qui enveloppe le monde, vous ne pourrez y parvenir; la limite que vous poursuivez recule; vos progrès, si multipliés qu'ils soient, sont toujours éludés par une réalité qui fournit sans cesse : or de quel nom appeler une réalité semblable? Une grandeur que nulle évolution ne peut atteindre n'est-elle pas, au sens le plus juste du terme, infinie? Qu'est-ce donc que l'infini, sinon la limite certaine, mais inaccessible d'une quantité toujours croissante?

On fait remarquer d'ailleurs que, si l'espace pur est, comme nous le prétendons, une fonction de la pensée, il est inexplicable qu'il déborde la pensée. Quoi! l'entendement est censé le

créer, et il ne saurait l'atteindre ! Cette infinité réfractaire à toute poursuite prouve, à n'en pas douter, que la quantité soumise à notre examen est tout autre que subjective ; notre analyse doit être en défaut.

Nullement, et l'on s'en convaincra sans peine si l'on pénètre plus avant dans le problème ; on peut prouver en effet :

1° Que, bien qu'il dépasse toute conception actuelle, si vaste qu'elle soit, l'espace pur n'implique aucun élément étranger à la pensée ;

2° Qu'il n'est pas, pour cette seule raison qu'il dépasse toute multiplication idéale, rigoureusement infini.

Si paradoxale qu'elle semble d'abord, la première proposition n'en est pas moins certaine. L'intelligence, il importe de le remarquer, ne s'épuise pas dans les actes qu'elle produit, et, loin de l'entamer, ses modifications successives ne font que la fortifier et que l'accroître. Qu'elle entreprenne donc de sommer les parties d'un tout donné, rien de mieux proportionné à ses forces, rien aussi de plus aisé à concevoir, puisque, le tout étant donné, les parties doivent l'être également ; mais que, se réfléchissant sur elle-même et se prenant pour but de son propre travail, elle tente d'annuler, en la dépensant, la force vive qui la constitue, c'est là une entreprise aussi vaine que ridicule, et, si longue que soit la série des manifestations psychiques ainsi obtenues, nous serons toujours aussi loin du but à atteindre : c'est que les phénomènes que nous pouvons produire sont sans nombre, tandis que les phénomènes qu'à un moment donné nous avons produits tombent nécessairement sous la loi du nombre. Ce principe posé, nous soutenons que c'est précisément parce que l'espace pur est une quantité subjective qu'il nous semble inépuisable. En effet, s'il n'est, comme nous le soutenons, qu'une forme de la pensée, les actes intérieurs qui ont pour objet de l'étendre progressivement, devront toujours laisser un résidu parallèle au pouvoir de l'étendre encore, ce qui a lieu en effet. Supposons, pour un moment, qu'une grandeur abstraite comme l'espace pur soit épuisée ; c'est que la faculté de la

créer en la concevant se sera épuisée elle-même; or rien n'est plus absurde qu'une telle hypothèse; nous sommes donc dupes de nous-mêmes lorsque nous pensons que l'étendue intelligible est une chose indépendante de l'esprit. Il en est de cette grandeur comme de toutes les autres : concrètes à leur source, déterminées dans les êtres et dans les objets où elles apparaissent, elles se modifient peu à peu sous l'action de la pensée qui les élabore, et, ce travail d'assimilation achevé, il ne reste plus d'elles que des cadres vides, de pures formes que l'entendement a pénétrées et qu'il occupe tout entières. Nous croyons avoir affaire à la grandeur en soi, et nous n'avons à faire qu'à notre propre pensée; dans le cas présent, par exemple, nous nous figurons ajouter sans cesse à la somme des parties de l'espace pur, et nous n'ajoutons en réalité qu'à la somme des actes intérieurs, sans lesquels ces parties ne seraient pas. Lorsqu'à chaque progrès nous trouvons devant nous un résidu nouveau, il nous semble que la quantité indocile à nos tentatives et rebelle à l'épuisement, défie toute poursuite. Erreur! Nous ne sommes distancés à chaque étape que par le pouvoir de fournir à l'indéfini des étapes nouvelles et semblables. Ce qui dépasse la somme de nos actes, c'est nous, c'est la virtualité qui nous constitue et doit être, à tout moment, supérieure à la synthèse des phénomènes qu'elle crée.

La lecture de la *Critique* est à ce point de vue spéciale d'un extrême intérêt. Kant n'a vu ou voulu voir de la quantité que le côté par où elle confine à l'entendement. Il ne l'a donc étudiée que sous son aspect strictement subjectif; aussi ce qu'il en affirme peut-il, en beaucoup de cas, être affirmé de la grandeur abstraite. Que l'Espace et le Temps, en effet, soient des formes *à priori* de l'intuition sensible, ou des concepts lentement assimilés à l'esprit, la théorie qu'on en doit faire, abstraction faite de leur histoire, reste en définitive à peu près la même. Dans l'un et l'au re cas, ces notions appartiennent comme parties intégrantes à la substance même de la pensée. Il y a plus de vingt siècles, l'au-

teur de la *Métaphysique* avait déjà compris que, à un certain degré de leur progrès parallèle, l'intelligence et l'intelligible ne font qu'un. Kant fait de cet acte final de l'entendement la condition même de toute évolution intellectuelle, et, en effet, dans la *Critique*, l'intelligible conçu *à priori* s'impose à la réalité qui subit sa loi. Il semble donc que les deux philosophies que nous comparons soient construites sur un plan diamétralement opposé : ici, le progrès de la pensée saisi sur le vif, progrès qui nous fait passer, sans que jamais la conscience proteste, de l'objet perçu à la trace qu'il laisse dans l'esprit sous forme d'image, et de l'image encore à demi sensible, au concept pur qui marque le dernier degré de l'élaboration mentale ; là, au contraire, l'idée *à priori* engendrant peu à peu la réalité sensible par l'intermédiaire obligé du schème ; les termes n'ont pas changé, leur rang seul a été interverti ; on dirait de deux épreuves, l'une positive, l'autre négative, mais d'ailleurs en tout semblables : d'une part, la série des faits se montre dans un ordre qui est celui de la nature elle-même ; de l'autre, elle apparaît telle que l'imagine l'idéalisme subjectif qui, comme la plaque sensible du photographe, ne dessine la réalité qu'en la renversant ; mais, quelle que soit de ces deux doctrines celle qu'on adopte, on ne contestera pas l'affirmation qui leur est commune, savoir que la quantité intelligible n'a rien de déterminé en soi, rien de réel, qu'elle n'existe enfin qu'en vertu d'une loi intérieure de l'entendement.

La preuve de la seconde proposition sera maintenant plus aisée. Est-il possible d'admettre que le résidu apparent de la quantité pure ou intelligible soit rigoureusement infini, si l'on a accordé déjà qu'il répond à un pouvoir non épuisé de l'entendement ? L'infini est, par définition, achevé ; or la virtualité dont nous parlons ne s'épuise ni ne s'achève. C'est ce qu'ont très nettement aperçu et très explicitement affirmé presque tous les philosophes de l'école expérimentale, Locke entre autres ; ce dernier use, pour faire comprendre sa pensée, d'un symbole ingénieux, celui de la fraction qu'on nomme

périodique, parce que les termes qui composent son numérateur, se répètent avec une régularité nécessaire. Que se passe-t-il, par exemple, lorsqu'on divise 10 par 3? Le premier quotient donne lieu à un reste qui engendre un quotient semblable, et ainsi de suite à l'indéfini; voilà le fait. Or ce que d'après le philosophe il faut remarquer, c'est que la période, qu'elle soit d'un chiffre ou de plusieurs, ne se reproduit qu'au gré de l'opérateur; en d'autres termes, la fraction ne se développe que si la division se continue, et seulement dans l'hypothèse où l'on serait décidé à toujours tenir compte du reste. Peut-on mieux marquer que ce progrès de chiffres sans cesse renaissants est lié à un pouvoir que nous sommes libres d'exercer ou non? Ce n'est pas tout. Comme la fraction n'existe que par une série d'hypothèses successives, comme elle dépend à chaque instant d'un reste qu'on peut retenir ou négliger, il est clair qu'elle ne possède qu'une réalité provisoire et subordonnée à notre bon plaisir; on ne peut donc pas dire qu'elle soit en elle-même infinie; en elle-même, elle n'est absolument pas. Cependant le besoin de réaliser des abstractions est à ce point irrésistible dans l'esprit de l'homme, que nous regardons cette quantité comme antérieure chronologiquement à la pensée qui la crée et qui semble ne plus faire que la découvrir période par période; nous croyons voir se succéder dans je ne sais quelle obscurité mystérieuse et s'aligner à l'infini une file incalculable de chiffres que l'intelligence exhumerait ensuite pour les appeler les uns après les autres, en même temps qu'à la lumière, à une vie individuelle et distincte; or rien n'est plus chimérique qu'une conception semblable; la série de ces périodes à demi effacées qui plongent dans l'ombre n'est que l'effet du pouvoir que nous avons de les produire et qui prend de ses actes éventuelles une conscience plus ou moins nette, et cela est si vrai que, toutes les fois que le sentiment de la virtualité intérieure s'exalte, l'obscure vision se précise, tandis qu'elle s'efface et peut disparaître absolument dans le cas contraire. Ce que nous disons du nombre s'applique, on le conçoit sans

peine, aux concepts analogues de l'espace et du temps; ni l'espace ni le temps pur ne sont réellement infinis, parce que ni l'un ni l'autre ne possèdent qu'une existence virtuelle. La partie éclipsée de ces notions que nous croyons voir se perdre à l'infini n'est qu'une illusion de l'entendement [1].

Concluons que l'espace n'est infini qu'en puissance, et que cette puissance même n'est pas dans l'espace, mais bien dans la raison qui l'engendre.

Qu'une telle conclusion doive être étendue au temps et au mouvement, c'est ce qu'il semble superflu d'expliquer. Le temps réel se développe parallèlement à la série des phénomènes qui se sont produits dans le monde; il est impossible de le prolonger au delà ou de le restreindre, sans faire violence à sa définition même. Supposer qu'il existe avant les conditions qui le rendent possible, c'est se payer de mots. Que nous veut donc ce temps vide, qui, dans l'antinomie connue, flotte incertain et sans point d'appui, avant l'éclosion de la vie universelle? Le temps vide est le vide absolu du temps. Comment eût-il précédé la durée véritable, la durée en soi? Avant tout écoulement de phénomènes, il n'existe et ne peut exister aucune intelligence finie, capable de lui communiquer, en l'imaginant, l'être purement idéal qu'il possède; et, quant à la raison créatrice, encore une fois elle ne peut concevoir comme vraiment possible une durée non réa-

1. Nous venons d'exposer la pensée de Locke; ni le rationalisme de son époque, ni le rationalisme postérieur, ni le criticisme allemand ne paraissent avoir suffisamment compris la portée de ses savantes analyses. La philosophie de l'expérience qui a repris possession de l'Angleterre, eût pu en tirer parti pour son propre compte et les faire servir au succès de la nouvelle doctrine, si, moins préoccupée des prétendues antinomies de la raison pure, elle n'avait laissé une porte ouverte à la superstition de l'infini. Un contemporain dont nous avons parlé, Shadworth Hodgson (*Time and Space*), revient à la tradition du maître en distinguant l'acte de la puissance, mais il compromet presque aussitôt cette distinction, en affirmant que nous pouvons nous transporter en pensée à la limite du pouvoir que nous avons d'ajouter sans fin le même au même. Nous avons donc non une conception, mais une sorte d'anticipation de l'infini. Cette vue originale, empruntée aux sciences abstraites, mériterait un examen approfondi. Qu'il nous suffise ici de faire observer que la limite au sens de la division est déterminée par la nature elle-même, tandis qu'au sens de la multiplication elle est absolument inconcevable.

lisée par elle, que si l'arbitraire est la règle et la fantaisie sa loi.

Comme le temps enfin, le mouvement réel est enfermé dans des limites certaines. Il se produit dans l'étendue et dans la durée et est nécessairement soumis à la loi du nombre. Son progrès à l'infini implique donc contradiction. Il n'existe en effet dans le monde qu'en quantité déterminée, on peut ajouter constante, si l'on tient compte de la persistance de la force. Le mouvement idéal n'est qu'une conception toute subjective que nous n'avons pas le droit de réaliser hors de nous.

La moitié de notre tâche est achevée; mesurons du regard l'espace parcouru. Toutes les analyses de détail nous ont conduits peu à peu et comme par degrés à une vaste loi d'ensemble : l'infini, dans la sphère du réel, est absolument inintelligible. Qu'il s'agisse de multiplication ou de division, cette loi est certaine. On devrait donc bannir de l'usage le terme infini, comme ne répondant à aucune idée intelligible, s'il ne trouvait son emploi dans le domaine d une quantité que nous n'avons pas encore étudiée, la quantité mathématique.

TROISIÈME PARTIE

L'INFINI MATHÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

L'INDÉFINI ET LA QUANTITÉ MATHÉMATIQUE

La quantité mathématique est de toutes la plus abstraite. — Le degré de son abstraction mesure le degré de son indétermination. — Comment l'indétermination engendre la continuité.

L'indétermination de la quantité, circonscrite par la borne extérieure d'une part, trouve d'autre part un terme ou une fin dans l'unité génératrice. — L'idée soit de borne soit d'unité génératrice, adéquate à l'idée de limite. — L'idée de limite, réminiscence de la chose en soi. — Tout mathématicien, en posant la limite, affirme avec ou sans réflexion que la chose en soi ne peut être divisée sans fin. — La limite opposée à la quantité mobile et fuyante, comme l'absolu au relatif.

Apparentes antinomies résolues si l'on tient compte en mathématiques de ces deux points de vue opposés. — Comme toute loi de génération dans l'absolu nous échappe, nous avons *subjectivement* le droit de multiplier et de diviser sans fin; comme l'élément générateur nous est connu *à priori*, nous avons le droit, *objectivement*, de concevoir et de poser la limite. Ce que nous ignorons en mathématiques, c'est la *formation intermédiaire*.

Le terme de la grandeur décroissante doit-il ou non être confondu avec l'élément générateur? — Le point et la ligne. — Discussion.

La définition de la grandeur mathématique explique l'incommensurabilité de la plupart des grandeurs abstraites que nous avons à mesurer.

Cette définition explique également les deux sens attachés au terme infini en mathématiques.

a. L'*infini subjectif*. — Il qualifie, dans la grandeur, l'indéterminé du contenu, qu'un tel indéterminé soit considéré en lui-même, ou qu'on l'envisage dans ses progrès ou ses réductions possibles. A ce second point de vue, l'infini subjectif est *dynamique*.

b. L'*infini objectif ou statique*. — Il représente la limite d'un progrès ou d'une décroissance.

Ces deux infinis répondent donc, l'un à l'élément relatif, l'autre à l'élément absolu de la quantité.

La quantité mathématique est la quantité parvenue au suprême degré de l'abstraction ; ce n'est qu'à cette condition, en effet, qu'elle peut être soumise au calcul. Quelque variées que soient ses méthodes, le calcul est toujours une opération mentale dont la matière est la grandeur relative, c'est-à-dire la grandeur, non telle qu'elle est, mais telle qu'elle se montre à l'entendement, sous la forme abstraite et dans le cadre idéalisé que l'imagination lui prête. La quantité réelle n'est nullement assimilable, parce qu'elle n'existe que sous certaines conditions incompatibles avec les exigences toutes subjectives de la pensée, exigences qui servent de règle au calcul lui-même. Il suit de là que la mathématique demeure enfermée dans le phénomène et ne connaît que des rapports. La nature calcule dans l'absolu, parce qu'elle opère sur des unités fixes; la raison de l'homme, ignorante et bornée, use seulement d'unités arbitraires et provisoires, qu'elle ne détermine ni ne définit que par comparaison.

On croit souvent que les mathématiques appliquées n'ont qu'un objet : mesurer la réalité à l'aide de formules conçues *à priori* par l'entendement; et, comme la coïncidence paraît exacte, on ne manque pas d'en inférer que les lois du sujet et de l'objet sont en parfaite harmonie. Il faut renoncer à cette illusion. Nous ne pouvons faire qu'une chose : concevoir à propos des apparences sensibles certaines lois nécessaires que nous leur appliquons ensuite. La bille d ivoire que je mesure, par exemple, n'est nullement la bille réelle, mais la bille visible avec sa continuité phénoménale et l'absolue indétermination de ses parties; que les formules relatives à la sphère idéale lui conviennent, dans la mesure où elle l'imite et selon le gré de ressemblance qu'elle a avec elle, rien à cela d'étrange ni de surprenant, puisque la sphère idéale n'est que la sphère apparente élevée à sa forme typique par la raison; mais de savoir si la sphère en soi répondrait à nos conceptions subjectives, ou même s'il existe quelque part une sphère en soi,

c'est ce qu'on ne peut présumer sans une témérité naïve; vues au microscope, les surfaces les plus polies deviennent rugueuses; les lignes courbes ou droites se brisent; et qu'on veuille bien remarquer que l'apparence nouvelle, quoique plus voisine de la réalité, en est encore à une incommensurable distance. La mécanique céleste applique ses lois au monde qu'elle s'est représenté à elle-même sous une forme idéale ou géométrique, mais elle sait qu'une telle conception n'est qu'une hypothèse, et que le calcul ne vaudra que dans la mesure où elle serait réalisée. On ne peut donc affirmer que le mouvement des sphères se produise dans le ciel véritable, conformément au schème que s'en fait l'imagination dans le ciel tout subjectif de l'astronome; le mouvement perçu, en effet, n'est qu'apparent; il faudrait, chose impossible, le comparer au mouvement en soi, pour apercevoir l'écart qui sépare la réalité de l'hypothèse scientifique. Quoi qu'on fasse, quelque biais que l'on imagine, on n'échappera pas à cette conclusion: La science pure ou appliquée se meut dans le relatif.

Ce qu'on vient de dire s'explique par cette considération que la quantité mathématique est purement idéale. Le concept du géomètre, la figure que sa pensée dessine intérieurement, n'est qu'un être de raison, qu'il convient de rapporter comme à son principe actif, à l'entendement créateur. Les mathématiciens ont souvent reproché aux philosophes de perdre de vue la vivante réalité des choses, pour ne tisser leurs systèmes qu'avec la substance même de leur pensée. Si c'est là un reproche, il faut l'adresser, ce semble, exclusivement aux géomètres, car les formes qu'ils imposent à la nature sont tellement relatives à l'esprit, qu'elles ne sont plus guère, à vrai dire, que l'esprit lui-même recréant la nature à son image et lui imposant la correcte monotonie de ses types. Le point de départ de tout travail d'abstraction, c'est l'apparence sensible ou le phénomène ; or le phénomène, on le sait, répond déjà à une première immixtion de l'esprit dans la réalité qu'il pénètre et qu'il transfigure; c'est peu : à chaque stade de l'abstraction croissante, l'apparence, soumise à une élaboration nouvelle,

prend des formes de plus en plus raffinées, de plus en plus idéales, c'est-à-dire de plus en plus semblables à l'âme qui les purifie en les dégageant de toute matière. Comment donc s'étonner qu'au terme d'un tel progrès le travail d'assimilation soit complet, et que vient-on parler au philosophe de ces « toiles subtiles » qui font songer au travail de l'araignée? La science de l'absolu, qui est la sienne, suit précisément une marche inverse : elle doit redescendre, un à un, les degrés de l'abstraction mathématique, et, arrivée à l'apparence sensible qui leur sert de base, chercher à en dégager, comme d'un produit, l'acte propre du facteur intellectuel, pour se faire une idée, si incomplète qu'elle soit, de la réalité des choses. Que ses efforts aient été souvent stériles, on l'accorde; mais qu'importe? Il ne s'agit ici que de son objet. Cette demi-impuissance, d'ailleurs, témoigne plus qu'on ne le croit en faveur de sa portée. La science la plus ancienne et la plus certaine doit être *à priori* celle dont l'esprit est à la fois l'objet et le sujet, la mathématique, confinée dans l'enceinte de l'entendement. Au contraire, si la méthaphysique hésite encore et tâtonne, c'est qu'elle a vue sur la réalité même; c'est aussi que, curieuse de l'embrasser tout entière, elle dépend de conditions sans nombre dans un domaine sans limites.

Continuons à dessiner les traits de la quantité mathématique. Comme elle est de toutes la plus abstraite, il faut qu'elle soit de toutes *la moins déterminée*[1]. Dépouillée de toute réalité objective, vidée en quelque sorte de toute matière, elle n'offre plus aux regards qu'un contenu indéfini et livré à l'arbitraire de la pensée qui entreprend de le mesurer; et rien ne s'explique mieux : c'est l'existence qui détermine les êtres en les faisant tels ou tels; plus une notion va s'éloignant de la réalité qui l'enveloppe, plus elle s'éloigne du principe véritable de l'individualité et de la vie. Tel est le cas de la quan-

1. Ici et dans les développements qui suivent, nous prenons indéterminé au sens grammatical du mot. Le contenu de la grandeur idéale est pour nous indéterminé parce qu'en lui-même il n'offre à la pensée rien d'arrêté ni de défini.

tité dont nous parlons. Entre les limites que lui impose le géomètre, elle flotte incertaine, et, si son contenu paraît inépuisable, c'est que rien de préexistant et d'arrêté n'y vient jamais contredire les suppositions de l'opérateur. Une telle indétermination est d'ailleurs favorable à la science; l entendement, affranchi des exigences du dehors, peut librement imposer ses lois à une grandeur désormais maniable et soumise sans résistance au calcul.

Toute quantité indéterminée est représentée à l'esprit comme *continue*, et il doit en être ainsi. En effet, si les éléments du *quantum* auquel est appliqué le calcul étaient discrets, ils seraient distincts les uns des autres, et conséquemment ils auraient un nombre défini. Or, s'ils avaient un nombre défini, l'hypothèse de l'indétermination serait violée. La continuité mathématique est donc en parfait accord avec les principes sur lesquels la mathématique est fondée; c'est de plus une copie idéalisée de l'apparence, qui, elle aussi, ne semble compacte et toute d'une pièce que parce que les fils serrés de la trame qui la constitue se dérobent par leur ténuité même à nos regards.

Que les propositions précédentes soient vraies de l'étendue, de la durée et du mouvement, c'est ce qu'on ne sera guère tenté de contester; en ce qui concerne le nombre [1], savants et philosophes sont moins d'accord. Le nombre paraît extrait des quantités que nous venons d énumérer, et cependant il ne possède, dirait-on, aucun de leurs caractères essentiels ; non seulement il semble déterminé, mais, dans la pensée d'un certain nombre de philosophes, c'est un principe de détermination [2]; non seulement il semble discontinu, mais on admet

1. Pour la plupart des mathématiciens, le nombre est moins une grandeur que l'expression de la mesure de toute grandeur. Ici, nous n'en faisons une quantité que parce que nous donnons au terme quantité toute l'extension dont il est susceptible.

2. Les pythagoriciens et après eux Platon ont fait du nombre soit mathématique soit idéal un principe de détermination et d'existence. Aristote en témoigne (*Mét.*, I, 7), tout en rejetant ce point de vue. Les surfaces, disent-ils, les lignes, les points, sont encore plus essences que les corps, puisque les corps ne peuvent exister sans elles et qu'elles peu-

généralement que la continuité idéale ne peut être fragmentée que par l'intervention du nombre, qu'il faudrait dès lors concevoir comme le principe même de la discontinuité.

L'antiquité presque tout entière fut sur ce point de l'avis du sens commun. Elle divisait la grandeur en deux genres parfaitement distincts : ici, le continu, τὸ συνεχές; là, le discontinu, τὸ διεχές : ici, les quantités tributaires du nombre qui les mesure ; là, le nombre lui-même qui ne les mesure qu'en les déterminant.

Cette distinction, si ancienne et si autorisée qu'elle puisse être, paraît à bien des égards contestable; un nombre, quel qu'il soit, est une collection ; l'unité elle-même est divisible, le concept de l'unité absolue se refusant à entrer dans une science essentiellement relative [1]. Qu'en résulte-t-il, sinon que tout nombre peut être considéré comme une synthèse de l'un et du multiple, et que dès lors il est permis de diviser un nombre quelconque en fractions toujours plus petites sans jamais fixer un terme? La somme des parties intégrantes est tout aussi indéterminée dans le nombre que dans une autre grandeur; il importe même de remarquer que le progrès des fractions qui représentent ces parties est continu, un nombre indéterminé de fractions intermédiaires pouvant toujours trouver place entre deux fractions successives, si rapprochées qu'on les imagine.

Ce qui frappe lorsqu'on observe la quantité appelée d'ordinaire discontinue, c'est qu'un nombre est toujours parfaitement distinct d'un autre nombre; de 3 à 4 par exemple, il existe une sorte d'hiatus ou de coupure qui ne permet pas de rapprocher ces deux termes, encore moins de les fondre l'un dans l'autre sans qu'il y paraisse. Mais que l'on veuille bien y réfléchir : deux longueurs, doubles l'une de l'autre, sont aussi des quantités qu'un abîme sépare, et, si l'on allègue

vent exister sans eux. — Ne sont-ce pas là, du moins à ce point de vue, les ancêtres véritables de Descartes et de Kant?

1. Kant fait observer à bon droit que toute unité phénoménale enferme nécessairement la pluralité (*Crit. rais. pure*, Log. Transc.).

qu'un nombre indéterminé de longueurs infinitésimales les unit, nous répondrons que deux nombres peuvent être unis pareillement par le moyen d'un nombre indéterminé de fractions toujours décroissantes. Il n'y a, ce semble, entre le nombre et les autres formes de la quantité qu'une différence essentielle, celle du degré d'abstraction. Le nombre est de toutes les grandeurs la plus abstraite, et ce qui le prouve, c'est qu'il pourrait servir à définir toutes les autres : l'étendue deviendrait alors le nombre des coexistants ; la durée, le nombre des successifs ; le mouvement, le nombre de ce qui peut être franchi sous la double condition de l'étendue et de la durée [1].

Fixons les résultats acquis. La quantité mathématique, quelle qu'elle soit, est à la fois *indéterminée* et *continue*, parce qu'elle est *abstraite* [2]. Reste à savoir si la continuité et l'indétermination, qui lui appartiennent en propre, sont absolues.

On remarquera qu'une grandeur donnée en intuition, telle ligne, telle surface, tel volume, par exemple, bien qu'indéterminée en soi, est néanmoins contenue entre deux ou plusieurs termes qui sont ses limites. L'indétermination complète serait, est-il besoin de le faire observer, le néant pur ; n'offrant à l'intelligence aucune prise, elle échapperait à tout calcul. Aussi de la grandeur en général les sciences abstraites n'ont-elles rien à dire : seule, la grandeur particulière, la

1. Voir les définitions analogues proposées par Aristote (*Phys.*, liv. III et IV). Le temps, d'après lui, est une forme du nombre ; il faut donc qu'il dépende de l'âme, car l'âme seule peut compter. 'Αδυνάτου ὄντος εἶναι τοῦ ἀριθμήσοντος, ἀδύνατον καὶ ἀριθμητόν τι εἶναι. (*Phys.*, liv. IV, 14.)

2. Ce que nous venons de dire de l'étendue géométrique peut, sans difficulté aucune, être appliqué à la durée et au mouvement considérés comme quantités idéales. D'une station à une autre, le mouvement idéal est continu, parce que le nombre des mouvements élémentaires qui le composent nous échappe, et que d'ailleurs l'étendue phénoménale dans laquelle il se produit est continue elle-même ; — ainsi de la durée, série linéaire dont le progrès est indéterminé, et qui se déroule, continue, entre deux instants.

Il est clair également que tout ce que nous affirmerons de l'étendue pourra être affirmé, *mutatis mutandis*, des deux grandeurs en question. Ainsi, dans l'une et dans l'autre, l'indéterminé du contenu s'oppose à la limite fixe ; dans l'une et dans l'autre, l'infini peut qualifier soit le contenu indéterminé lui-même, soit la limite d'un progrès ou d'une décroissance fournie par ce contenu.

grandeur telle ou telle, nous intéresse et sollicite nos analyses; or la grandeur n'est telle ou telle que si son indétermination essentielle cesse à la limite qui la fixe; elle n'est telle ou telle que si elle offre à l'imagination du géomètre un tracé exact et des contours définis.

Mais avons-nous le droit de déterminer une quantité indéterminable par essence? On répondra qu'entre les bornes qui la circonscrivent la grandeur mathématique demeure intacte. Il faut ici soigneusement distinguer le contenu du contenant. La quantité proprement dite, c'est le contenu. Comment confondre l'essence d'une chose avec le terme où cette chose expire et s'évanouit? Si la borne semble parfois faire partie de la quantité, ce n'est que pour l'entendement soumis à la nécessité d'évoquer les contraires, l'indéterminé appelant le déterminé comme le haut appelle le bas, le grand le petit. Mais la raison n'est pas dupe, et à ses yeux, dès qu'apparaît la limite extérieure, la grandeur n'est plus; la grandeur ne saurait comprendre les lignes ou les surfaces qui arrêtent son essor et contiennent son développement.

Déterminée, au point où finit son progrès, par la *limite*, la quantité mathématique l'est encore à son origine par l'*élément générateur*. Qu'est-ce que l'élément générateur? comment le concevoir et par quel procédé l'atteindre? C'est ce qu'il faut maintenant examiner.

A la rigueur, on pourrait choisir comme élément d'une quantité donnée l'une quelconque de ses subdivisions, mais cet élément serait arbitraire et sans valeur théorique. Prenons un exemple : il s'agit, je suppose, d'une longueur de deux mètres; je la décompose par la pensée en vingt parties égales que je suis libre de considérer comme autant de facteurs du progrès destiné à engendrer la grandeur totale. Mais pourquoi m'arrêter au décimètre? Le décimètre n'est pas, au sens rigoureux du terme, un élément de grandeur; composé lui-même, il n'est composant que par rapport à ses multiples; il me faut donc chercher une nouvelle unité de mesure, un sous-multiple du décimètre, le centimètre, par exemple; alors, on

le comprend, la même difficulté va se présenter; je ne puis m'arrêter dans cette voie régressive, et cependant je dois m'arrêter.

Pourquoi? Pour une raison décisive. Si je ne m'arrête pas, la quantité retenue d'une part, grâce aux bornes qui la circonscrivent, va m'échapper de l'autre et glisser, si j'ose dire, entre mes mains, sans que je puisse empêcher sa fuite dans le sens de l'indéfinie petitesse. Que faire? Je ne puis demeurer au sein de cette quantité mobile, sous peine de m'épuiser en efforts stériles et de me voir toujours distancé; il faut que j'en sorte; il faut que, par un vigoureux élan de ma pensée et comme d'un bond, je la dépasse. Mais comment la dépasser? N'ai-je pas pour cela à franchir un intervalle infini? Indéterminé, veut-on dire, parce qu'en lui-même et dans ses parties élémentaires un tel intervalle m'est inconnu. Certes ma science de la quantité en soi est bien courte; je ne saurai jamais quel est le nombre des parties intégrantes qui entrent dans la composition d'un tout donné, mais il est une chose que je sais et que je sais bien, une chose aussi certaine pour moi que le principe de contradiction sur lequel elle est fondée : c'est que l'élément doit être d'une nature différente de celle du tout, sous peine d'être lui-même un autre tout, à son tour décomposable; cette certitude me suffit; je vais droit au but, et, laissant là l'indéterminé de la grandeur, je me fixe d'abord au point où, de division en division, sans que je sache au juste quand ni comment, la grandeur doit se terminer [1].

1. On objectera que la grandeur ne rencontre et ne doit rencontrer nulle part le terme ultime dont nous parlons. *Subjectivement*, rien n'est plus certain, et nous croyons nous-même qu'il est impossible, à qui demeure au sein de la quantité, d'en rencontrer jamais le terme. Dans l'abstrait, nous ne trouvons jamais aucune raison de suspendre nos multiplications ou nos divisions, et il nous semble loisible de les recommencer sans fin. *Objectivement*, c'est tout autre chose. Il est de toute nécessité qu'une grandeur, dès qu'elle n'est pas rigoureusement infinie, se termine quelque part. — Ou il existe autant d'infinis actuels qu'il y a de grandeurs intelligibles ; — ou il faut que pour chacune de ces grandeurs la limite, à un moment donné, soit atteinte.

L'originalité de la théorie qu'on propose est tout entière dans la distinction du subjectif et de l'objectif. Faute de l'avoir suffisamment com-

On ne peut guère douter que ces considérations ou des considérations analogues n'aient dirigé, qu'ils s'en soient rendu ou non un compte exact, les plus anciens géomètres dans la construction de leur science; leurs conceptions fondamentales, ces définitions si simples et si précises, destinées, comme autant d'assises solides, à porter l'édifice idéal de leur science, les présupposent visiblement et les impliquent. C'est ainsi qu'ils ont fait du point l'élément générateur de la ligne, de la ligne l'élément générateur de la surface, de la surface l'élément générateur du volume. Tous ont compris qu'il est aussi impossible d'atteindre de tels éléments par voie régressive que nécessaire de les poser, soit au terme de l'analyse, soit à l'origine de la synthèse; quelques-uns sans doute ont dû pressentir qu'il fallait, pour les poser, franchir la distance qui sépare le relatif de l'absolu [1].

prise, on risque de se heurter à des définitions inintelligibles ou à des propositions autinomiques.

Dans le cas présent, par exemple, il s'agit de définir la limite d'une quantité qui croît ou décroît, et l'on dit que cette limite est le terme dont la quantité en question s'approche toujours sans l'atteindre jamais. Cette définition enveloppe une contradiction visible si l'on ne tient pas compte de la différence des deux points de vue. En effet, — ou la quantité s'approche de sa limite, et l'on peut être certain qu'elle l'atteindra, la distance qui l'en sépare ayant diminué et par suite ne pouvant en aucune façon être considérée comme infinie; — ou au contraire la limite est toujours à l'infini, et dès lors l'approximation qu'on imagine est impossible, l'infini se trouvant toujours interposé entre les deux termes.

Et il ne servirait de rien d'alléguer qu'il y a des infinis plus grands les uns que les autres, car, ainsi qu'on le verra plus tard, de tels infinis ne sont pas des infinis rigoureux. Ici, infini a son sens vrai : il veut dire illimité, et ce qui est illimité ne saurait l'être plus ou moins.

Comment lever cette contradiction apparente? En invoquant la distinction proposée : le géomètre obéit à une nécessité *subjective* quand il affirme que la grandeur n'atteint jamais sa limite; et d'autre part il tient compte des lois de la *chose en soi*, quand il soutient qu'elle s'en rapproche. Nous ne savons pas, de notre point de vue extérieur et relatif, quand la limite est atteinte, et voilà pourquoi nous disons qu'elle ne l'est pas; nous savons cependant que dans l'absolu elle doit l'être, et voilà pourquoi nous parlons d'approximation continue. Le mouvement sans fin de la quantité variable n'est que *dans l'esprit;* la limite est *dans les choses.* (Voir les chapitres précédents sur la quantité en soi, nécessairement déterminée quant au nombre de ses éléments.)

1. L'opposition de l'absolu au relatif n'est autre ici que l'opposition de la quantité en soi à la quantité phénoménale.

On voit, par ce qui précède, que la *limite extérieure* d'une part, et de l'autre l'*unité génératrice*, offrent des caractères analogues, sinon identiques. Toutes deux ont pour but de fixer la quantité soit à son origine, soit à son terme; toutes deux lui sont opposées, comme le fini à l'indéfini, la forme précise à la matière vague et sans essence. Si l'on pouvait douter de l'étroite parenté de ces notions empruntées à la chose en soi dont elles sont le décalque, il suffirait de remarquer que ce sont les éléments mêmes de la grandeur que l'entendement projette à ses extrémités comme limites : le point, origine de la ligne, en est également la borne; la surface, qu'elle croisse ou décroisse, est toujours terminée par la ligne; le volume enfin trouve dans la surface, en même temps que la limite nécessaire de ses réductions, l'origine première de ses progrès.

L'idée que nous devons nous faire de la quantité mathématique, et spécialement de celle que le géomètre analyse [1], apparaît maintenant de plus en plus nette : *c'est une quantité en elle-même incertaine, flottante entre des limites et engendrée par des éléments qui lui communiquent peu à peu, grâce à l'industrie du savant, une sorte de détermination relative.* La grandeur mathématique peut en effet être mesurée, mais c'est en fonction des termes absolus dont nous venons de parler : l'aire du triangle est égale au produit de sa demi-base par sa hauteur, ou réciproquement; le cercle équivaut à la circonférence multipliée par le demi-rayon, et ainsi de suite, qu'il s'agisse de la géométrie plane ou de la géométrie dans l'espace.

Comme la synthèse n'est que l'analyse renversée, nous avons, dans les considérations qui précèdent, assimilé le terme de la grandeur décroissante à l'élément de la grandeur progressive. Cette identité sera peut-être contestée par ceux d'entre les mathématiciens qui éprouvent à l'égard de tout ce qui est théorie pure un sentiment d'invincible défiance. Le point, diront-ils par exemple, peut bien être considéré, en

1, Voir la note page 125.

un sens, comme le terme idéal des réductions de la ligne, mais il n'en est pas le principe générateur, parce qu'à lui seul il ne saurait la créer en se répétant. Il nous est impossible d'admettre une telle restriction. Pourquoi la ligne serait-elle autre chose qu'une synthèse de points indéterminés pour nous quant à leur nombre ? — Parce que la ligne a une longueur et que les points n'en ont pas ? — Mais il serait absurde au contraire que les éléments de la longueur fussent longs, car alors on pourrait les diviser dans le sens de leur longueur, et ce ne seraient plus des éléments. — Prétend-on que les éléments, à proprement parler, font défaut ? — La grandeur alors fera défaut elle-même et ne sera pas engendrée, à moins qu'on n'invoque, au début de la science la plus exacte, le miracle d'une création *ex nihilo*. — Veut-on dire qu'il suffirait pour lui donner naissance du progrès continu d'infiniment petits toujours croissants ? — Oui, si le progrès dont on parle était rigoureusement infini, ce qui implique. Vous ne pouvez, dans une telle hypothèse, ni trouver la limite par voie régressive, ni poser, au sens progressif, l'élément générateur. L'existence de votre quantité, fût-ce la plus simple, fût-ce la ligne, reste un problème aussi malaisé à résoudre que n'importe quel problème de métaphysique. C'est un fait inexpliqué et inexplicable.

Lorsqu'on propose de donner comme origine à la ligne des éléments sans longueur, l'imagination seule proteste. Pour la raison, au contraire, seule apte à en décider, tout autre mode de génération est impossible. On ne saurait créer la ligne avec la ligne si petite qu'on la conçoive ; ce serait supposer qu'elle existe ; on ne saurait non plus la tirer de rien ; reste que la ligne ait pour origine véritable le concept intermédiaire du point. Si dans la nature, ainsi que l'a cru Leibniz, deux unités métaphysiques ou deux monades juxtaposées peuvent déjà engendrer un minimum de longueur, pourquoi pareille possibilité ne serait-elle pas introduite dans la science, sous cette réserve et avec l'expresse restriction que le nombre d'éléments ainsi juxtaposés nous échappe ?

On veut, quand même, exclure le point de la ligne. De quel droit, alors, prendre un point sur une ligne donnée, soit pour la diviser en parties distinctes, soit pour y faire passer une ligne différente de la première? Comment la ligne fournit-elle à l'opérateur ce que, par hypothèse, elle ne possède pas? Et si le géomètre prétend créer lui-même, sans qu'il préexiste, le point qu'il conçoit, à l'endroit où il le conçoit, nous demandons quel est cet endroit où il crée le point et de quel nom il le désigne [1].

Pour échapper à ces difficultés, on propose parfois une définition de la ligne qui n'a qu'un inconvénient, celui d'enfermer une formelle pétition de principe. La ligne, dit-on, est la trace d'un point qui se meut. Mais ce point, lorsqu'il se meut, occupe nécessairement des points successifs qui doivent préexister idéalement dans l'espace, et, s'il marque sa trace, ce ne peut être que dans une direction qu'on a dû préalablement déterminer; ce qui implique l'antériorité logique de la ligne sur le mouvement, et par suite l'impossibilité de faire appel au mouvement qui n'existe pas encore, pour créer la ligne.

Mettons-nous cependant dans l'hypothèse de nos adversaires. Si le point se meut pour tracer la ligne, il ne peut se mouvoir que dans un espace égal à lui même, et par suite il ne peut que se répéter, ce qui nous ramène de gré ou de force à la seule supposition logique qu'on puisse faire sur la genèse de la longueur.

On peut dire enfin et en se gardant de toute apparence de cercle : la ligne n'est que la synthèse de deux points et de leur intervalle [2]. Cette définition a un grand avantage :

1. On évite d'ordinaire de se prononcer sur le problème si délicat qui nous occupe, en définissant le point par l'intersection de deux lignes, la ligne par l'intersection de deux surfaces, et ainsi de suite... Mais de semblables définitions, si dégagées en apparence de toute vue métaphysique, viennent précisément confirmer la théorie qu'on propose. Il faut bien, en effet, que le point soit l'élément commun de toute ligne, puisque deux lignes quelconques se rencontrent toujours et nécessairement en un point. On raisonnerait ainsi sur les lignes et sur les surfaces.

2. Renouvier, *Log.*, liv. I, ch. XXX.

elle fait ressortir le contraste de la grandeur indéterminée et de sa limite; mais est-ce bien là aller au fond des choses, et le problème est-il résolu? Examinons. L'intervalle qu'on ne suppose pas actuellement divisé est néanmoins toujours divisible; il faut donc qu'il se résolve en intervalles nouveaux qui tous doivent avoir une double borne. Dès lors, ou la ligne n'a ni origine ni terme, ce qui en fait un infini rigoureux, ou les points qu'on voulait bannir reparaissent, clair-semés d'abord, puis de plus en plus denses, jusqu'au moment inconnu de nous où, la limite des subdivisions étant atteinte, les derniers intervalles s'émiettent en indivisibles qui occupent enfin et nécessairement toute la place.

On peut donc, sans blesser aucune exigence ni violer aucun principe de l'entendement, introduire le nombre dans la quantité géométrique, à condition de le supposer toujours indéterminé, sinon en soi, du moins pour nous, ignorants de toute *formation intermédiaire* et de tout *progrès naturel.*

Ce serait évidemment se soustraire à cette loi que de supposer, en mathématique, que deux points tangents ou un nombre déterminé de ces points donne jamais naissance à une longueur. Qu'il en soit ainsi dans le réel, c'est ce que nous avons voulu établir; mais, dans l'abstrait, une telle hypothèse devient absolument inintelligible. Si la division d'une quantité indéterminée quant au nombre de ses éléments, donne toujours naissance à des quotients indéterminés eux-mêmes, si par conséquent dans l'analyse d'une ligne nous n'avons jamais aucune chance de rencontrer un nombre qui désigne un groupe déterminé d'éléments intégrants, comment veut-on que ce nombre existe dans la synthèse? La ligne AB renferme un nombre x de points; la moitié de cette ligne en renfermera $\frac{x}{2}$, le quart $\frac{x}{4}$, le huitième $\frac{x}{8}$, et ainsi de suite. Jamais nous ne verrons apparaître des chiffres comme 5, 4, 3, 2, représentant un nombre exact d unités absolues, et l'on supposerait que ces mêmes chiffres sont donnés comme les facteurs primitifs de la même quantité

mathématique considérée au sens progressif! Regarder une telle hypothèse comme légitime, ne serait-ce pas introduire la contradiction dans les données de la science, détruire le parallélisme nécessaire d'opérations qui doivent se répondre comme l'analyse et la synthèse, confondre enfin, sans ombre de prétexte, le relatif avec l'absolu, la géométrie avec la métaphysique?

Demander au géomètre ce qui doit résulter logiquement de la juxtaposition de deux points, c'est le mettre dans la nécessité de répondre que l'hypothèse étant, à son point du vue, illogique, aucune conséquence n'est possible ni concevable. C'est une réponse analogue que l'on fait parfois, lorsqu'on affirme que deux points tangents coïncident. En géométrie, en effet, comme dans toute science abstraite, on ne saurait concevoir que l'unité élémentaire déterminée en elle-même, ou le pur indéterminé de la grandeur; nul milieu n'est possible. Vous proposez au géomètre un problème qui implique l'existence d'un nombre déterminé d'éléments, deux par exemple; vous n'en avez pas le droit, et votre interlocuteur a le droit, au contraire, de vous ramener à la donnée fondamentale de la science mathématique, qui exige qu'aucun nombre [1] ne puisse être déterminé au sein de la grandeur idéale, sauf l'unité génératrice qui en est en même temps le terme absolu.

Pour que deux points soient conçus comme distincts en mathématiques, il faut donc qu'ils soient séparés par un intervalle; c'est que l'intervalle est indéterminé. Cela revient à dire : entre deux points distincts, vous ne pouvez faire qu'une hypothèse conforme à la science, celle d'un nombre indéterminé de points semblables.

Quelque répugnance que manifestent certains géomètres pour la théorie qu'on propose, elle peut se recommander de noms illustres. La méthode d'exhaustion découverte et exposée par Archimède, ouvrait la voie à une méthode parallèle de

1. Il ne s'agit ici que du nombre absolu, car dans la grandeur idéale tout nombre relatif est concevable. Cette distinction est trop aisée à faire pour qu'on insiste.

reconstitution ou de synthèse adoptée par Galilée et Cavalieri [1] dans les temps modernes. Ces savants firent du terme de la quantité décroissante le véritable élément de la grandeur. Il leur parut sans doute que, pour passer d'une notion à l'autre, il devait suffire de changer le sens de l'opération, ici régressive, là progressive. La même pensée semble se faire jour dans les remarquables écrits de Roberval [2]. Pascal lui-même est bien près de s'y rallier lorsqu'il s'agit des problèmes relatifs à l'infini [3]; mais une telle conception vaut

1. Les recherches de Galilée avaient précédé celles de Cavalieri. Les persécutions dont il fut victime, dit Libri (*Histoire des math. en Italie*, t. IV, p. 288), l'empêchèrent seules d'achever l'ouvrage qu'il préparait depuis longtemps sur les indivisibles.

Cavalieri a exposé sa méthode dans l'ouvrage qui a pour titre : *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota.* Nous insisterons plus loin sur la conception fondamentale de Cavalieri, et sur l'infinité des lignes et des plans qu'il imagine pour mesurer les surfaces et les volumes.

2. Roberval a composé un traité des *Indivisibles*. En voici un passage important :

« Pour tirer des conclusions, dit-il, par le moyen des indivisibles, il faut supposer que toute ligne, soit droite, soit courbe, se peut diviser en une infinité de parties ou de petites lignes, toutes égales entre elles, ou qui suivent entre elles telle progression que l'on voudra, comme de carré à carré, de cube à cube, de carré-carré à carré-carré ou selon quelquè autre puissance. Or. d'autant que toute ligne se termine par des points, au lieu de dire que toutes les petites lignes sont à telle chose en certaine raison, on dira que tous ces points sont à telle chose, en ladite raison. Par tout ce discours on peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes et compose la ligne entière; l'infinité de petites lignes représente l'infinité de superficies qui composent la superficie totale; l'infinité de superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total. » *Traité des indivisibles.* (Cité par Hoëfer, *Hist. des math.*, p. 441.)

3. Pascal écrit à Carcavi : « Je ne ferai nulle difficulté d'user de ce langage des indivisibles : la somme des lignes, ou la somme des plans, et ainsi, quand je considérerai par exemple le demi-diamètre d'un cercle *CF*, divisé en un nombre indéfini de parties égales au point *Z*, d'où sont menées les ordonnées *ZM*, je ne ferai nulle difficulté de me servir de cette expression : la somme des ordonnées, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes, ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence... » (*Œuvres complètes de Pascal*, t. II, p. 544. Paris, 1860.)

moins, à vrai dire, par les suffrages qu'elle a obtenus que par les raisons qu'elle fait valoir et les conséquences qu'elle engendre : aucune, à notre sens, n'est logiquement plus vraisemblable et plus féconde en résultats.

Pour ne nous attacher qu'aux plus importants, la question de l'incommensurabilité mathématique s'éclaire, à ce qu'il semble, d'un nouveau jour, si l'on admet que toute quantité dérive de quelque unité génératrice destinée, en deçà de certaines limites, à la constituer en se répétant. Rien assurément n'est moins intelligible que l'incommensurabilité dans la nature. Ce qui est réel est défini, et, la somme des unités intégrantes se trouvant à l'avance déterminée pour chaque grandeur, tout rapport doit être, au regard de la pensée créatrice, exprimable en nombres certains; mais en mathématiques c'est toute autre chose Si dans chaque cas spécial nous connaissons l'unité génératrice, la loi de génération, au contraire, nous échappe toujours, et ce qui nous échappe, c'est l'essentiel. Réduits par les limites mêmes de notre entendement à ignorer le nombre exact des éléments qui font partie d'un tout naturel, il nous faut, dans le calcul, recourir à un système d'approximations qui, en dehors de certaines circonstances propres à amener une solution toute relative, resteront indéfinies, rien ne venant jamais nous apprendre à quel moment il convient de nous arrêter dans la décomposition idéale de la grandeur pour rencontrer l'unité absolue et indivisible qui l'a intégrée.

Attachons-nous, pour plus de clarté, à un schème précis. Soit à mesurer la grandeur A, et soit a l'unité adoptée, a n'étant assujettie qu'à la condition d'être de même nature que la grandeur A. Divisons a en n parties égales, et portons une de ces parties autant de fois que possible sur A ; elle y est contenue, par exemple, p fois, mais n'y est pas contenue $p + 1$ fois. La mesure de A est donc comprise entre les deux nombres $\frac{p}{n}$ et $\frac{p+1}{n}$.

Si l'on divise a en un plus grand nombre de parties égales,

n' par exemple, on trouvera que la mesure de A est comprise entre $\frac{p'}{n'}$ et $\frac{p'+1}{n'}$, et ainsi de suite.

Alors, dans ce progrès, de deux chose l'une : — ou le calcul se disposera de telle sorte que nous rencontrerons une commune mesure, laquelle sera toute relative, parce que, étant de la nature du tout, elle n'aura rien de strictement élémentaire; — ou il nous faudra continuer à l'infini, le moment de l'élément absolu ne pouvant être déterminé.

Il existe néanmoins, et pour s'en convaincre il suffit de remarquer que a ne saurait être divisé en un nombre rigoureusement infini de parties égales. La limite de n sera donc, dans la chose en soi, un nombre N, représentant le nombre exact des éléments qui entrent dans a. La grandeur A contiendra, en conséquence, P ou P + 1 de ces éléments et sera mesurée par les nombres $\frac{P}{N}$ ou $\frac{P+1}{N}$.

Ainsi il y a incertitude sur le nombre qui mesure la grandeur A, et la différence des deux mesures possibles est $\frac{1}{N}$ valeur d'un *élément absolu.*

D'autre part, P et N étant des nombres absolus, nous n'aurons jamais chance de les rencontrer dans la série parallèle mais toute subjective et absolument illimitée de nos opérations mentales.

Il résulte de là que l'incommensurabilité n'est qu'apparente et relative; inconcevable dans les choses, elle résulte de la définition même de la grandeur idéale ou mathématique.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer avec quelque précision l'idée de l'infini mathématique. L'infini a deux sens distincts selon qu'il qualifie l'un ou l'autre des deux éléments essentiels de la quantité idéale, le *contenu indéterminé* ou la *limite.*

1er SENS.

L'infini subjectif ou dynamique.

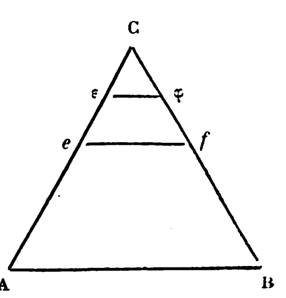
§ I. L'infini qui qualifie le contenu de la grandeur mérite le nom d'infini subjectif, car il représente une indétermination qui est incompatible avec la chose en soi et n'existe que pour notre entendement borné. On se rappelle le sens attaché par la philosophie ancienne au terme ἄπειρον ; la géométrie, en se l'appropriant, lui a conservé sa valeur étymologique et traditionnelle ; il semble parfaitement choisi pour désigner ce milieu arbitraire et incertain flottant entre deux ou plusieurs limites.

Prenons quelques exemples :

Si le géomètre fait de la ligne une synthèse de points, il dira, ce semble, à bon droit, qu'elle en enferme un nombre infini ; traduisez : un nombre tel qu'à notre point de vue subjectif il ne saurait être déterminé.

Il dirait dans le même sens que par un point pris arbitrairement sur une surface on peut faire passer une infinité de lignes ; le nombre de ces lignes, en effet, est incalculable.

Autre exemple. Soit le triangle isocèle ACB. On démontre en géométrie que d'un point quelconque de la base AB il est possible de mener une droite au sommet C. Dans l'absolu, une telle proposition est manifestement fausse, car la ligne *ef*, moins longue que la ligne AB, doit contenir moins d'éléments. On conçoit même une ligne εφ créée à l'origine de l'angle ACB par un nombre minime de points et que par suite traverserait un nombre minimum de lignes droites issues de AB. Le sens, si grossier qu'il soit, suffirait à le faire entendre : des fils d'une ténuité à peine visible, et aussi semblables qu'on pourrait l'imaginer à la ligne sans largeur, se briseraient sensiblement à mesure qu'ils s'éloigneraient de la base du triangle pour se rap-



procher de son sommet; mais le point de vue mathématique est tout autre. Quelque courte que soit la ligne rudimentaire εφ, elle est pour le géomètre, aussi bien que la ligne AB, aussi bien qu'une ligne quelconque prise pour base à 100, 1000, 10000 mètres du sommet, composée d'un nombre infini de points, — traduisez toujours d'un nombre d'éléments indéterminable, — si bien que toutes les droites menées de AB au sommet, trouveront toujours jusqu'au point limite C, exclusivement, un nombre indéterminé de points à franchir[1].

1. La méthode des indivisibles, sans sortir du point de vue où doit se placer la science, tenait néanmoins quelque compte de la donnée objective. Voici comment, d'ordinaire, on procédait dans cette méthode pour démontrer un théorème. Il s'agissait, je suppose, de prouver que *deux pyramides de même base et de même hauteur sont aussi de mêmes volumes*. On commençait par les regarder l'une et l'autre comme composées d'une infinité de surfaces planes; puis on affirmait que ces surfaces planes étaient de même forme et en nombre égal de part et d'autre; la conclusion nécessaire était que les volumes des pyramides, qui sont les sommes respectives de ces éléments, sont égaux entre eux.

Une telle démonstration étant exacte et justifiée par l'expérience, il faut qu'aucun des principes ou des postulats sur lesquels elle repose ne soit faux; il est donc parfaitement vrai, ce qui, pour notre thèse, n'est pas d'un médiocre intérêt :

1° Que le nombre des surfaces planes est de part et d'autre infini, c'est-à-dire indéterminé pour nous ;

2° Que deux hauteurs égales doivent être traversées par un nombre égal de surfaces, car, quelque indéterminé que soit pour nous le nombre des points qui donnent naissance à ces hauteurs, *il doit être en soi le même pour des hauteurs qui sont les mêmes ;*

3° Que les points qui engendrent ces deux hauteurs, se succédant ici et là en deux files parallèles et symétriques, se répondent chacun à chacun et ne peuvent, également éloignés qu'ils sont de bases égales, donner naissance qu'à des surfaces planes de même forme.

Outre qu'il met en son vrai jour le sens usuel du terme infini, ce théorème confirme la théorie que nous avons proposée. En effet, si deux lignes indéterminées quant au nombre de leurs éléments doivent néanmoins en posséder le même nombre lorsqu'elles sont de même longueur, c'est, à n'en pas douter, parce que « l'indéterminé pour nous » est le « déterminé en soi ». Dans l'hypothèse contraire, il est clair que l'affirmation du même nombre n'aurait pas de sens, et la preuve que l'on veut faire deviendrait par suite impossible.

Un théorème analogue et non moins curieux est celui qui a pour objet l'évaluation de l'aire du triangle. Nous ne le citons ici que pour donner une idée du procédé à l'aide duquel on évaluait une aire ou l'on mesurait un volume dans la géométrie des indivisibles. Il servira d'ailleurs à donner une idée plus précise encore du sens qu'on doit attacher, dans le premier cas dont nous parlons, au terme infini.

Soit donné un triangle. Abaissons de son sommet sur la base une

On dit de même que, étant donné un cercle, on peut mener de la circonférence au centre une infinité de rayons. Au point de vue de l'absolu, nous nous inscrivons encore en faux contre cette proposition, car, si l'on dessine intérieurement au cercle proposé des circonférences de rayon toujours moindre, on comprendra qu'une circonférence très voisine du centre ne puisse contenir le même nombre d'éléments que la circonférence enveloppante; mais le mathématicien néglige, de parti pris, cette donnée objective, dont il n'a que faire. Toute circonférence, grande ou petite, enveloppante ou enveloppée,

perpendiculaire. Partageons cette perpendiculaire en une infinité de parties égales, et menons par chacun des points de division une droite parallèle à la base et qui soit terminée par les deux autres côtés du triangle.

Suivant les principes de la géométrie des indivisibles, nous pouvons considérer l'aire du triangle comme la somme de toutes les parallèles qui en sont regardées comme les éléments; or, par la propriété du triangle, ces droites sont proportionnelles à leur distance du sommet. Donc, la hauteur étant supposée divisée en parties égales, ces parallèles croissent en progression arithmétique ou par différence dont le premier terme est zéro.

Mais dans toute progression par différence dont le premier terme est zéro, la somme de tous les termes est égale au dernier multiplié par la moitié du nombre de ses termes; or ici la somme des termes est représentée par l'aire du triangle, le dernier terme par la base, et le nombre des termes par la hauteur; donc l'aire de tout triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

Ce théorème, emprunté au remarquable ouvrage de Carnot qui a pour titre *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, est le type de tous les théorèmes analogues relatifs à la pyramide, au cône, au cylindre, etc., etc. Les considérants qu'il fait valoir ont donc une portée générale, et, puisque la démonstration réussit, on doit regarder comme certain :

1° Que le nombre infini des parties égales qu'on prend sur la perpendiculaire n'est infini, autrement dit indéterminé, que pour notre ignorance, puisqu'on affirme qu'il peut être sommé et que, sans nuire à la preuve, on ramène l'aire du triangle à la somme des parallèles dont ces parties forment l'arête médiane ;

2° Que les parallèles ainsi tracées sont si exactement déterminées en elles-mêmes dans l'absolu qu'on a le droit : 1° de regarder chacune d'elles comme proportionnelle à sa distance du sommet; 2° toutes ensemble comme constituant une progression par différence ;

3° Que le zéro n'a pas toujours une valeur absolue, puisque, dans la progression arithmétique que l'on propose, il représente le sommet du triangle ; or ce sommet est un point ; il n'est donc ni ne saurait être considéré comme nul. Il est vrai qu'il a une longueur nulle, et c'est tout ce que signifie dans le cas présent le terme zéro opposé aux autres nombres possibles.

renfermant, dans l'hypothèse où il se place, un nombre indéterminé de points, en fournira toujours autant qu'il est nécessaire pour qu'on y fasse aboutir un nombre illimité de rayons.

C'est comme indéterminés qu'on peut légitimement et sans froisser la raison concevoir des infinis plus grands ou plus petits les uns que les autres. Ne prenons pour le moment que des exemples très simples. Dans la langue de mathématiques, quel que soit sur ce point l'usage reçu, n'aurait-on pas le droit de dire qu'une ligne de quatre mètres est, au point de vue de son contenu, un infini deux fois plus grand que la ligne de deux mètres, quatre fois plus grand que la ligne d'un mètre? Toute ces lignes, en effet, déterminées par leurs extrémités, restent indéterminées quant à leur contenu, et, si différentes que soient leurs dimensions, le nombre des unités intégrantes est aussi incertain dans la longueur mesurée par un mètre que dans la longueur double ou quadruple. Ces exemples, bien entendu, n'ont qu'une valeur provisoire. En traitant de la quantité infinitésimale, il nous sera aisé de donner une idée plus précise de ce qu'entend le mathématicien par le progrès de ses infinis superposés.

§ II. L'infini que nous proposons d'appeler subjectif mérite dans beaucoup de cas le nom d'infini *dynamique*; voici pourquoi :

Le contenu indéterminé de la grandeur n'est pas toujours conçu dans son ensemble comme un système formé de parties en repos ; il est susceptible de croître ou de décroitre et se prête ainsi à une double série d'opérations, les unes soustractives, les autres additives, à l'aide desquelles on différencie ou l'on intègre. Le mouvement idéal qui en résulte ne saurait être que continu, car, ainsi qu'on l'a vu plus haut, la continuité et l'indétermination sont inséparables; de là des réductions et des progrès insensibles qu'on n'appelle « infiniment petits » que parce qu'ils sont toujours plus petits qu'on ne saurait l'imaginer et que leur mesure est aussi indéterminée que celle de la grandeur à laquelle ils appartiennent et qu'ils modifient.

Dans ce cas, l'infini est bien encore l'indéterminé, mais *l'indéterminé en marche* et traversant un nombre d'*étapes* indéterminé comme lui.

La série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots.$$

serait un infini au sens dont nous parlons, un infini *dynamique*, non moins d'ailleurs que l'infinitésimale de Leibniz, dont il sera question dans le chapitre suivant, et qui, au lieu de croître sans cesse, semble redescendre tous les degrés de la grandeur sans s'arrêter à aucun et sans jamais rencontrer zéro.

2e SENS.

L'infini objectif ou statique.

Cet infini qualifie non le mouvement lui-même, mais le terme que l'esprit conçoit par une sorte d'anticipation nécessaire, à la limite du mouvement soit progressif soit régressif. On peut l'appeler *objectif*, car la limite est dans les choses plutôt que dans l'esprit; *statique*, car la limite est fixe et marque le point d'arrêt de la quantité variable.

§ I. S'agit-il du terme d'un mouvement régressif? L'infini se confond alors avec l'élément générateur de la quantité. Le point, pourrait-on dire dans ce cas, si l'on ne craignait de faire violence à la langue des mathématiques, est à l'infini de la ligne décroissante ; la ligne vue de la surface décroissante, la surface vue du volume décroissant seraient également et dans le même sens à l'infini.

§ II S'agit-il au contraire du terme d'un progrès? Selon que ce progrès est relatif ou absolu, l'infini représente une limite réelle ou purement imaginaire.

Le cas du progrès relatif est le plus fréquent. Il n'est guère de grandeur géométrique qui décroisse à un point de vue sans croître à un autre. La série des accroissements est dans ce

cas subordonnée à celle des diminutions; lorsque la division s'arrête, la multiplication doit s'arrêter. Tel est le progrès relatif. Les faces triangulaires de la pyramide qui tend de plus en plus vers la forme conique vont se rétrécissant toujours, mais elles se multiplient sans cesse ; au moment où les triangles seront parvenus au minimum possible de leur surface, l'accroissement progressif du nombre des côtés aura atteint sa limite maximum, limite réelle, bien qu'inconnue de nous, et que nous situons à l'infini. De même, dans un polygone de plus en plus voisin du cercle, les côtés, à mesure que leur longueur diminue, deviennent plus nombreux. A quel instant précis atteindront-ils le maximum de leur nombre? Lorsqu'ils atteindront, d'autre part, le minimum de leur longueur. Dans ces exemples, le minimum peut être déterminé : il n'en est point ainsi du maximum, placé à l'infini du progrès relatif de la quantité. On se rend aisément compte de cette différence : nous ne pouvons nous représenter une quantité sans concevoir en même temps son mode de génération et le point de départ de son progrès; mais la limite de ses accroissements doit nécessairement nous échapper, parce que nous ignorerons toujours à quel moment le minimum qui lui correspond sera atteint.

Dans le cas dont nous venons de parler, l'infini existe, bien qu'inconnu. Dans le cas du progrès absolu, l'infini n'est ni connu ni même réel. Cette proposition est si certaine que, pour la science elle-même, un tel infini n'est que le symbole de l'impossible. Deux courriers partent sur une même route de points différents, et se dirigent dans le même sens avec la même vitesse. Quand et où se rencontreront-ils? A l'infini, c'est-à-dire jamais et nulle part. Qu'on imagine en effet que la distance initiale qui les sépare soit de un kilomètre; cette distance restera évidemment toujours la même; toutefois elle semblera toujours moindre à mesure que les espaces franchis de part et d'autre seront plus considérables : en d'autres termes, bien qu'invariable en soi, elle donnera naissance, comparée à des intervalles de plus en plus longs, à des rap-

ports variables. Il se produira alors dans l'étendue un phénomène analogue à celui qui se produit dans la durée, lorsqu'une différence d'âge très sensible entre deux personnes encore jeunes s'efface et tend à disparaître dans leur vieillesse. Le mathématicien cherche donc à rendre cette loi de diminution sensible dans ses formules; les courriers, dit-il, tendent à se rencontrer; ils se rencontreront à l'infini; mais il n'est nullement dupe de cette locution; il reconnaît tout le premier que, dans de telles conditions, la rencontre est impossible, et les termes qu'il emploie reviennent à ceux-ci : « Tant que les espaces franchis seront exprimables à l'aide du nombre, la rencontre n'aura pas lieu. » Nous ajouterons : « Comme la limite de l'espace, non plus que celle de nombre, ne peut jamais être atteinte, une telle rencontre est purement et simplement chimérique. »

Certaines formules usitées en algèbre donneraient lieu à des explications analogues. L'infini de grandeur est quelquefois représenté sous la forme d'une fraction dont le numérateur serait un nombre fini n et le dénominateur zéro. Cette fraction a-t-elle un sens? et, si elle en a un, comment l'interpréter? Deux cas, comme précédemment, sont possibles : ou le dénominateur zéro est relatif, ou il est absolu. Dans le premier cas, il désigne la fin d'une dimension [1], de la longueur ou de la largeur par exemple; dans le second, il marque le terme absolu de l'être. Supposons donc que dans la fraction $\frac{n}{0}$ le dénominateur soit relatif : la fraction exprimera alors le rapport d'une quantité à sa limite, et, nous le savons, ce rapport ne peut être représenté que par l'infini mathématique, le terme d'une quantité croissante ou décroissante n'ayant, au point de vue subjectif de la science, plus rien de commun avec cette quantité. Le second cas, celui où le zéro serait absolu, n'exprime, comme dans le problème des courriers, qu'une

1. Dans la formule à l'aide de laquelle *Cavalieri* détermine l'aire du triangle, le sommet est représenté par zéro qui n'a alors visiblement qu'une valeur relative.

impossibilité radicale; on veut dire alors vraisemblablement que la distance qui sépare la quantité du néant pur, n du zéro absolu, est telle qu'aucune multiplication de ce néant par lui-même ne parviendrait à la combler; elle ne serait comblée que si l'on pouvait passer à la limite des multiplications possibles ($\infty \times 0 = n$), et l'on n'atteindrait la limite des multiplications possibles que si l'on atteignait celle du nombre, ce qui est absurde. »

Recueillons en quelques formules précises les résultats que nous a fournis cette étude sur la quantité mathématique.

1° La quantité mathématique est de toutes la plus abstraite.

2° Le degré de son abstraction mesure le degré de son indétermination.

3° Cette indétermination toutefois n'existe qu'en deçà de certaines limites, décalque exact de la réalité en soi, souvenir de l'absolu au sein de la quantité idéale.

4° L'incommensurabilité n'est qu'un corollaire de l'indétermination de la grandeur.

5° Comme la quantité mathématique se compose de deux éléments essentiels, le contenu indéterminé et la limite fixe, on peut distingner en mathématiques deux sortes d'infinis.

6° L'infini qu'on pourrait appeler dynamique désigne l'indétermination de la grandeur progressive ou régressive en deçà de la limite.

7° L'infini auquel nous donnons le nom de statique marque au contraire la limite d'une décroissance ou d'un progrès.

8° En résumé, l'infini qualifie tantôt le contenu tantôt le contenant de la quantité, tantôt sa matière, tantôt sa forme.

1. Bien qu'en arithmétique et en algèbre, ces sciences qu'on pourrait appeler abstraites du second degré, certaines formules n'aient guère qu'une valeur de convention, il en est quelques-unes qu'on interprète sans trop de peine : ainsi $\frac{0}{0}$, qui est la formule de l'indéterminé mathématique et dont le quotient est toujours représenté par n, n représentant un nombre fini quelconque.

1,6

CHAPITRE II

L'INDÉFINI ET LA QUANTITÉ INFINITÉSIMALE

Objet propre du calcul infinitésimal. — Différences que présentent à première vue théories et algorithmes. — Les théories seules nous intéressent. — On peut, malgré leur variété apparente, les ramener à deux principales.

Définition de la méthode objective. — Elle est fondée sur l'idée de limite et tient compte dans l'analyse de la quantité, de l'élément absolu.

Définition de la méthode subjective. — Elle écarte de parti pris l'élément absolu ou la limite. — Ce que c'est que l'infinitésimale de Leibniz. — Son mode d'emploi. — Comment on procède dans la méthode subjective.

1° La méthode objective.

Ses deux points de vue. — Méthode d'exhaustion ou méthode soustractive. — Archimède.

Méthode additive. — Cavalieri.

Conséquences logiques qui résultent du succès de l'une et l'autre méthode. — Il existe entre la limite et la grandeur un rapport inconnu de nous.

A la thèse d'Archimède, à l'antithèse de Cavalieri succède la synthèse de Newton.

La méthode des premières et dernières raisons à la fois additive et soustractive.

L'antinomie posée par le premier lemme n'est que l'antinomie des deux points de vue subjectif et objectif qu'enveloppe la définition de la quantité mathématique.

La valeur logique du premier lemme démontrée par cette définition même.

L'idée objective de limite prédominante dans la théorie des premières et dernières raisons. — Le zéro relatif de Cavalieri et de Newton. — La formule $\frac{0}{0}$ ne représente l'indétermination que si le numérateur et le dénominateur ont une valeur absolue. — Le zéro relatif n'est que le zéro de grandeur (limite ou unité génératrice).

Conclusion :

La méthode objective ou méthode des limites, tenant seule compte des deux éléments de la quantité mathématique, est la seule qui soit absolument fondée en raison.

2° La méthode subjective.

Comment Leibniz essaye de la justifier. — Ses raisons acceptées par M. Renouvier, qui regarde l'erreur commise dans l'algorithme comme moindre que toute erreur assignable. — Pourquoi, malgré ces autorités, la théorie nous semble défectueuse. — L'erreur moindre que toute erreur assignable est toujours supérieure à une erreur nulle.

Conséquences nécessaires de la théorie de Leibniz. — Ou l'infini existe, ou l'erreur subsiste.

a. L'infini existe. — Bernouilli, Fontenelle.

b. L'erreur subsiste. — Buffon, Aug. Comte.

Comment expliquer que la théorie de Leibniz, bien qu'irrationnelle, donne naissance à des calculs exacts, et que l'algorithme réussisse?

Principe invoqué par Descartes pour fonder la méthode des indéterminées. — Ce principe repris et développé par Carnot.

Toute variable en relation avec des quantités fixes passe à la limite. — L'absolu reparaît malgré Leibniz dans la quantité qu'il épuise ou qu'il intègre, et crée à lui seul la valeur de son algorithme.

Les infinis de divers ordres.

Conclusion. — La méthode subjective serait une méthode incomplète et donnerait naissance à des erreurs appréciables si l'infinitésimale n'était annulée.

Une seule théorie est rationnelle, la théorie objective, fondée sur la définition de la quantité mathématique, laquelle à son tour est fondée sur la définition de la quantité en soi (voir les six premiers chapitres).

Nous croyons avoir recueilli les éléments indispensables, non à la solution (une telle témérité serait sans excuse) mais à la position rationnelle du problème infinitésimal agité par les mathématiciens depuis des siècles. Chacun sait quel merveilleux instrument de précision la science possède dans l'algorithme créé par le génie de Leibniz; les procédés qui le constituent sont aujourd'hui nettement définis, et personne, depuis longtemps, n'hésite plus ni sur leur valeur pratique ni sur leur mode d'emploi ; mais la question de savoir à quel titre ils sont légitimes, quelle loi ou quel principe de raison en justifie l'usage, paraît encore loin d'être résolue, et, lorsque dans ces hautes régions du calcul on cherche à s'élever jusqu'à la théorie pure, il semble qu'on abandonne les vérités solides de la science, pour les incertitudes de la métaphysique; les termes d'ordinaire si précis de la mathématique deviennent plus vagues; les malentendus abondent, et les systèmes se multiplient; on dirait que le milieu favorable au succès de la pensée scientifique lui échappe, et que l'air respirable lui manque; des hommes tels que

Cavalieri, Newton, Leibniz, Lagrange, proposent des explications différentes, parfois opposées. — Que faire ? — Abandonner le problème sous prétexte que l'algorithme réussit et que dès lors la théorie pure importe peu ? On ne saurait s'y résigner, et d'ailleurs le besoin de s'élever dans toutes les directions de la pensée aux principes supérieurs déjoue les plus fermes résolutions. — L'aborder de confiance en vue de le traiter pour son propre compte ? — Si une telle ambition était permise, ce serait à un esprit aussi rompu aux pratiques de la science que familier avec les spéculations de la métaphysique ; le divorce qui depuis trop longtemps sépare ces deux ordres de travaux et maintient dans un isolement stérile des études que les penseurs d'une autre époque avaient su si utilement associer, rend une semblable tentative à peu près impossible. — Une voie seule nous est ouverte : nous attacher à la trace des maîtres, noter les divergences qui les séparent, et recueillir soigneusement les traits de ressemblance qui les unissent. Il semble que ces analogies profondes doivent avoir leur raison d'être dans la vérité absolue des choses. Une telle supposition paraîtra plus vraisemblable encore, si les analogies dont nous parlons résultent comme une conséquence naturelle et rigoureuse des principes posés dans le précédent chapitre.

Essayons de déterminer exactement la nature du problème que nous allons aborder. Le calcul infinitésimal a, si nous ne nous trompons, pour objet propre, la génération et l'épuisement de la quantité continue. Il s'agit, lorsqu'on applique ce calcul à la grandeur, de fixer en formules précises la loi du mouvement idéal qui lui permet de croître ou de décroître par voie de progression insensible. Le mouvement ainsi conçu flotte entre des points de repère déterminés, qui parfois sont absolus et marquent des temps d'arrêt définitifs, parfois n'ont qu'une valeur provisoire et conditionnelle, s'étageant, à titre d'infinis de divers ordres, à une distance indéfinie les uns des autres.

Pour atteindre le but, deux méthodes seulement, en dépit

de leur multiplicité apparente, ont été proposées, et à la réflexion on ne tarde pas à se convaincre que ces deux méthodes étaient et sont encore les seules possibles. — Nous avons distingué dans la quantité deux éléments ou, si l'on veut, deux facteurs indispensables, la *quantité* proprement dite et sa *limite :* la quantité, indéterminée et relative; la limite, fixe; l'une, dans son progrès ou dans sa fuite à l'infini, inaccessible à l'entendement; l'autre, créée de toutes pièces par l'entendement lui-même, qui l'emprunte à la sphère de la chose en soi ou de l'absolu. Cette distinction peut être représentée aux yeux. Qu'on imagine une de ces terres dont l'intérieur est inexploré et qui restent en blanc sur la carte du géographe, tandis que les côtes visitées sur tous les points laissent apparaître un dessin net et précis; c'est ainsi qu'en elle-même et dans la loi de son évolution la grandeur est non seulement inconnue, mais « inconnaissable », bien que ses limites, décalque exact des limites de la quantité en soi, nous soient données avec le principe de contradiction [1].

Ceci posé, on conçoit que deux procédés très différents puissent être proposés avec succès en vue de résoudre le problème infinitésimal. L'un, s'attachant au concept de la quantité elle-même, cherchera dans le caractère d'indétermination qui lui est propre un élément de solution; on pourrait le nommer subjectif, car il ne fait jamais appel aux souvenirs de la réalité proprement dite ou de l'absolu. L'autre, au contraire, comptera parmi ses moyens d'investigation la poursuite des limites propres à chaque espèce de grandeur; il conviendrait par opposition au premier de le nommer objectif, la considération des limites étant, nous l'avons vu, étroitement liée à la théorie de la chose en soi.

Etudions de plus près le mécanisme et le fonctionnement de chacune de ces méthodes. — La méthode qu'on propose d'appeler objective est fondée sur ce principe que, de division en division, la grandeur diminuant toujours, atteint à l'infini

1. Voir les premiers chapitres, relatifs à la quantité en soi.

sa limite et disparaît comme grandeur. Il faut donc admettre que le mouvement idéal qui l'emporte et dont la tendance est visible dès les premières opérations que l'on réalise, est réglé par le principe de continuité mathématique, jusqu'au moment, incertain pour nous, mais déterminé en soi, où il atteint enfin le but. Ce but que nous anticipons, ce terme où la quantité expire, nulle régression mentale ne pourrait l'atteindre ; mais il est indispensable que la grandeur l'atteigne, car il faut de toute nécessité qu'elle finisse. Voilà, si nous ne nous trompons, l'idée mère, la conception dirigeante de la méthode dite des limites. Cette méthode offre deux aspects, selon qu'on épuise la quantité ou qu'on l'intègre. Dans le premier cas, son nom véritable serait celui que lui ont donné, à si juste titre, les anciens, qui l'appelaient méthode d'exhaustion; dans le second, la méthode est, au contraire, additive; les principes à ce nouveau point de vue demeurent les mêmes, la marche seule est différente ; la limite devient l'élément et se trouve au point de départ, le tout à reconstruire est au terme de l'opération, cette fois toute synthétique, puisque nous sommons au lieu de soustraire ; mais qu'il s'agisse de décomposition ou de recomposition, au point de vue objectif on tient et on doit toujours tenir compte des deux éléments ou des deux facteurs indispensables de la quantité, savoir la quantité elle-même et sa limite. Galilée et Cavalieri n'ont fait en définitive que retourner la méthode d'Archimède; et il n'est pas douteux qu'ils en aient eu pleine conscience, puisque l'auteur de la *Géométrie des Indivisibles* a lui-même reconnu qu'à proprement parler il ne créait rien.

Une formule résumera ce développement. Dans la méthode objective des limites, qu'il s'agisse d'exhaustion ou d'intégration, la grandeur doit théoriquement se concevoir comme composée d'unités absolues dont le groupement nous échappe et nous échappera toujours [1]. Que les savants qui ont adopté

1. C'est à l'aide du terme infini qu'on introduit cette réserve dans les formules mathématiques.

cette méthode se soient tous rendus un compte exact de ses exigences et aient explicitement formulé la proposition précédente, là n'est pas la question, et au fond peu importe. Il suffit qu'une telle conclusion soit logiquement enfermée dans les prémisses qu'ils acceptent, pour que nous nous croyions le droit de l'en faire sortir et, avec les réserves voulues, de la leur attribuer.

La méthode qu'on propose de désigner sous le nom de méthode subjective, est connue d'ordinaire sous le nom de méthode des infiniment petits. Ce qui la caractérise essentiellement, c'est qu'elle s'interdit toute vue, quelle qu'elle soit, sur l'absolu. Elle écarte de parti pris ces éléments d'une portée objective, ces unités primordiales qu'invoque constamment la méthode des indivisibles, et refuse de les introduire dans ses calculs, même avec la correction, indispensable dans le relatif, de l'infinité ou de l'indétermination de leur nombre. L'idée de limite conçue comme le terme d'une décroissance, idée si familière à la méthode d'exhaustion, est, pour les mêmes raisons, reléguée au second plan, si elle ne disparaît tout à fait. A ce point de vue nouveau, nous restons enfermés dans la quantité, sans chercher jamais à en sortir ; or c'est une vérité maintenant acquise, que le concept de quantité, lorsqu'on en a écarté l'idée de limite ou d'élément, est à ce point abstrait et vague, qu'on peut le regarder comme une pure forme de la pensée, appliquant, sans plus tenir compte d'aucune donnée extérieure, sa loi de répétition indéfinie ; un procédé tel que celui que nous décrivons est donc éminemment subjectif. — Voilà le point de départ. — Mais avançons. Comment, dans une telle donnée, se représenter l'épuisement et la génération de la grandeur? C'est ici qu'apparaît tout l'art d'une méthode que le génie de Leibnitz a fondée sur la plus ingénieuse et en même temps sur la plus utile des conventions. On fait appel à une unité de mesure purement fictive, qui, par définition, n'ayant rien d'absolu, ni par suite de strictement élémentaire, résume et condense dans sa petitesse indéterminée, les propriétés caractéristiques de la quantité d'où on

l'a extraite, et dont elle n'est que la réduction infinitésimale; cette quantité toujours multiple en puissance, c'est-à-dire toujours divisible, échappe à l'œil qui la cherche, elle fuit sous la main qui veut la saisir; c'est un extrait de grandeur et par suite une grandeur véritable, si souple toutefois et si élastique que non seulement elle recule d'elle-même vers une limite relative comme elle, savoir l'infiniment petit d'ordre inférieur, mais qu'elle peut, dans ces essais d'épuisement que rien n'épuise, fournir autant d'ordres d'infiniment petits inférieurs qu'il est nécessaire ou qu'on le désire. On l'appellerait minimum de quantité si un minimum n'était pas nécessairement absolu; c'est plutôt une fraction mobile, dont le dominateur, déjà incomparablement plus grand que celui d'une autre fraction de même numérateur qu'elle, pourrait néanmoins grandir encore et sans limites ; ébauche d'unité plutôt qu'unité véritable. — Dans le vivant, il faut, pour trouver l'unité définitive, descendre jusqu'à l'élément inorganique; mais on peut s'arrêter à moitié route, à l'unité relative et provisoire de la cellule, qu'il est permis de comparer au composé vivant parce qu'elle est de même nature que lui, et qui d'ailleurs, ainsi que la quantité infinitésimale, peut se fragmenter spontanément et se répéter sans fin; le savant qui adopte la méthode subjective dont nous parlons s'arrête, lui aussi, à l'élément organique de la quantité : il se refuse à poursuivre l'élément véritable, l'élément absolu qu'il déclare aussi incompatible avec la grandeur mathématique que l'atome de matière brute avec le tout organisé et vivant.

Comme la méthode objective, la méthode subjective présente deux aspects différents, selon qu'il s'agit de tarir ou d'intégrer une quantité; la différentielle représente la différence insaisissable de l'infiniment petit à sa limite, et la somme des différentielles est l'intégrale.

On se fera une idée, si incomplète qu'elle soit, de l'utilité spéciale et du mode d'emploi des grandeurs réduites dont nous parlons, si l'on remarque qu'à titre de quantités elles peuvent légitimement avoir accès dans une for-

mule algébrique quelconque; en effet, on ne saurait trouver, entre les infiniment petits et les quantités auxquelles on les compare, aucune disparité de genre, ainsi qu'il arrive nécessairement lorsqu'on met une grandeur relative en face de sa limite ou de son élément absolu; c'est tout au plus si l'on pourrait constater une simple disparité d'espèce, très positive mais fort peu embarrassante dans la pratique entre des valeurs arbitraires et des valeurs fixes. C'est déjà un premier résultat : voici maintenant les avantages qui en découlent. Soumis aux lois générales du calcul et dociles aux manipulations que subit la quantité algébrique, les infiniment petits donnent naissance à des formules que sans eux on n'aurait pu obtenir, formules souvent inattendues, lumineuses, qui dégagent certains points de vue latents et mettent en relief certains aspects d'abord enveloppés du problème.

« Pour se rendre un compte plus exact encore des résultats qu'on doit à ce procédé, on n'a, dit M. Renouvier [1], qu'à se rappeler la méthode de *maximis* et *minimis* de Fermat, dans laquelle Lagrange et Laplace ont signalé le précédent le plus net et le concept propre (quoique en un cas très particulier seulement) de l'algorithme infinitésimal de Leibniz :

« Fermat faisait entrer dans l'expression algébrique d'une relation entre deux grandeurs, l'une de ces grandeurs augmentée de zéro, puis égalait cette relation ainsi modifiée à la même relation avant sa modification, opérait des réductions, retranchait à ce moment seulement les termes qui se trouvaient nuls en vertu de son hypothèse de la grandeur zéro et parvenait ainsi à l'inconnue cherchée [2]. Or ce zéro de Fermat

1. Renouvier, *Critique philosophique*, 6e année, n° 2.

2. Voici, d'après Hoëfer, le problème auquel il est fait allusion dans ces lignes de Renouvier. Il offre un véritable intérêt, parce qu'il peut donner, même aux esprits les moins familiers avec la méthode infinitésimale, une idée de l'algorithme de Leibniz.

« Supposons qu'il s'agisse de partager en deux une ligne, de manière que le produit de ces deux parties soit le plus grand possible. Pour mieux nous faire comprendre, donnons à cette ligne une valeur numérique, par exemple 6. Ce nombre peut se partager de telle façon qu'on ait d'un côté une progression ascendante, et de l'autre une progression

est simplement l'indéterminé infiniment petit ou infinitésimal que Leibnitz emploie dans le calcul sous un signe particulier, mais en le traitant comme une grandeur réelle jusqu'au moment où il supprime, pour résoudre certaines classes de problèmes, tous ceux des termes des relations qui seraient nuls, si l'infinitésimal était nul. »

Que font donc, après Leibniz, tous ceux qui se servent de l'algorihme infinitésimal ? Ils introduisent les grandeurs fictives que nous venons de définir dans les formules qui expriment les conditions du problème posé, et, lorsqu'elles lui ont communiqué un aspect nouveau et favorable à la solution, ils les écartent de la scène où elles ont joué le rôle principal, pour ne laisser en présence les uns des autres que les données primitives, c'est-à-dire, les quantités fixes qui, seules, sont en question. Paraître un moment, pour représenter une différence infiniment petite, soit au sens du pro-

descendante dont les termes additionnés reproduisent toujours la même somme :

$$\begin{aligned} 5 + 1 &= 6 \\ 4 + 2 &= 6 \\ 3 + 3 &= 6 \\ 2 + 4 &= 6 \\ 1 + 5 &= 6 \\ 0 + 6 &= 6. \end{aligned}$$

« Maintenant, au lieu d'additionner ces termes, multiplions-les. Le produit le plus grand, cas de maximum, est celui où les deux nombres (facteurs) sont égaux : $3 \times 3 = 9$. Le produit minimum est celui où l'un des facteurs est zéro : $0 \times 6 = 0$. Pour généraliser, appelons a une ligne droite donnée, et x une partie de cette ligne, l'autre partie sera $a - x$. Pour que le rectangle, produit des deux parties, soit un maximum, il faut que x soit égal à $(a - x)$ ou que $x = \frac{a}{2}$. Si l'on désigne par e un accroissement infiniment petit de x, de manière que $x + e = x + 0$, on aura :

$$x\,(a - x) = x + e\,(a - x - e),$$

d'où

$$e\,(a - 2x) - e^2 = 0,$$

et en dernière analyse:

$$a - 2x = 0,$$

ou

$$x = \frac{a}{2}.$$

grès, soit au sens de la décroissance, puis disparaître dès que le problème a été mis en son vrai jour, tel est le rôle essentiel de ces quantités tel que Leibniz lui-même l'a défini.

Ici, une sérieuse difficulté se présente. A-t-on le droit de retrancher d'une équation l'une quelconque des quantités qui en font partie, et ne risque-t-on pas, si on se le permet, d'en troubler l'équilibre et d'en détruire l'exactitude ? En d'autres termes, l'absolue rigueur qui est le privilège des mathématiques ne va-t-elle pas céder la place à un système d'approximations plus ou moins grandes ? Cette objection est venue plus d'une fois tourmenter la pensée de Leibniz ; mais il se répondait à lui-même et répondait à ses adversaires, que la grandeur retranchée n'étant pas une grandeur fixe, l'erreur ne pouvait être déterminée ; parallèle à l'infiniment petit dont elle imite le mouvement spontané et progressif de décroissance, cette erreur devait être toujours moindre qu'une erreur assignée, si petite qu'elle fût. Écoutons sur ce point délicat de sa théorie le philosophe lui-même[1] :

« Les grandeurs indéterminées dont nous parlons, écrit-il à Varignon, sont des incomparables relativement aux grandeurs finies, ou encore relativement les unes aux autres, incomparables qui, pouvant être pris aussi petits qu'on veut dans les raisonnements géométriques, font l'effet des infiniment petits rigoureux, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre énonciation, il s'ensuit par notre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, étant en notre pouvoir de prendre cet incomparablement petit assez petit pour cela, puisqu'on peut toujours prendre une quantité aussi petite qu'on veut... C'est sans doute en cela que consiste la démonstration rigoureuse du calcul infinitésimal dont nous nous servons. »

Telle est, si nous l'avons saisi dans ses grandes lignes, la méthode originale et féconde que créa Leibniz. Que cette méthode réussisse, c'est un fait ; on sait même que l'algorithme

1. Lettre à Varignon, Dutens, III, 370.

dont elle use est de tous celui dont le maniement est le plus facile ; mais il n'est pas douteux que la méthode des limites réussisse également. Faut-il croire que l'une et l'autre aient une égale valeur théorique ? C'est la supposition qui paraît d'abord la plus vraisemblable : toutefois, lorsqu'après un moment de réflexion, on est arrivé à constater les divergences de vues qui les séparent, il est difficile de se défendre d'un doute sérieux, et l'on se demande si l'une d'elles moins fondée en raison, ne réussirait pas, en dépit même des considérants qu'elle invoque. La réponse à cette question n'est pas possible sans une étude plus détaillée des deux théories. Nous l'essayerons, non sans une extrême et trop légitime défiance de nos forces, décidés d'ailleurs à ne nous attacher dans cette analyse qu'à ce qui relève de la logique pure et est de nature à intéresser la spéculation proprement dite, c'est-à-dire la métaphysique.

I

Il est remarquable tout d'abord que la première méthode dans l'ordre des temps, celle qui s'est le plus spontanément offerte à l'esprit humain, soit la méthode des limites. On dut comprendre et l'on comprit en effet de bonne heure la parenté qui unit certaines figures, le cercle et le polygone par exemple [1]. Il est même probable qu'à l'origine le cercle fut plus d'une fois mesuré à l'aide du polygone soit inscrit soit circonscrit dont on multipliait les côtés afin d'enfermer dans des limites de plus en plus étroites l'erreur qu'il fallait se résoudre à commettre [2].

De là à l'idée d'une exhaustion totale il n'y a qu'un pas.

1. Nous faisons toutes nos réserves en ce qui concerne la possibilité intrinsèque du cercle; nous restons ici au point de vue purement intuitif du géomètre.

2. Le procédé qui consiste à enrouler un fil sur la circonférence d'un cerceau et à comparer la longueur de ce fil développé à la longueur du diamètre du même cerceau est un procédé analogue, le fil ne dessinant jamais une forme exactement circulaire.

Est-il possible de le franchir ? Existe-t-il quelque moyen de supprimer la différence et d'épuiser l'intervalle qui sépare les deux tracés? Ce problème s'imposa aux méditations des premiers géomètres : Anaxagore, dans sa prison, cherchait, dit la tradition, à carrer le cercle; Hippocrate de Chios donna la mesure exacte du ménisque ou de la lunule [1]; mais ce ne sont là que des essais sans valeur au point de vue de la théorie générale, qui n'était pas même pressentie encore. Il était réservé au plus grand génie mathématique de l'antiquité de se faire, des rapports de la quantité variable et du terme fixe vers lequel elle s'achemine, une idée assez précise pour que la méthode des limites fût dès lors fondée. Sans doute, la courbe fut mentalement assimilée par Archimède à une ligne brisée d'un nombre infini de côtés ; mais le moyen de faire accepter cette hypothèse, qui semblait impliquer contradiction ? Il parut plus sûr à l'illustre géomètre de faire de la circonférence la limite commune de deux périmètres, l'un enveloppant, l'autre enveloppé, et épuisant tous deux, en sens opposé, l'espace intermédiaire; la quantité prenait ainsi une sorte de mobilité spontanée, et l'intervalle, diminuant toujours, finissait par disparaître, lorsque de part et d'autre le terme du progrès était atteint.

Telle est l'idée maîtresse d'Archimède. Voyons sur quels principes elle se fonde et quelles conséquences en découlent.

Le point de départ de la théorie est fourni par l'opération elle-même; à mesure que l'on fait croître la grandeur, dans le cas présent, par exemple, à mesure qu'on multiplie les côtés des deux périmètres, l'exhaustion semble de plus en plus voisine.

La loi de continuité, survenant ensuite, permet à l'opération ainsi ébauchée de se renouveler en quelque sorte d'elle-même et de se répéter sans fin.

L'entendement affirme toutefois l'existence d'un point d'ar-

1. La lunule est l'espace compris entre deux arcs de cercle inégaux.

rivée, c'est-à-dire d'une limite fixe, au progrès que la loi de continuité engendre.

Mais là est précisément la difficulté. Le progrès, s'il est continu, est indéfini, et, s'il est indéfini, il n'a pas de limite. Cette apparente antinomie dut frapper vivement l'esprit d'Archimède, et l'on sait jusqu'à quel point elle exerça depuis le génie des Newton, des Leibniz, de tous les penseurs enfin qui ont regardé en face et abordé de front le problème. Si la limite est à l'infini, elle n'existe pas, et, si elle n'est pas à l'infini, où est-elle, et à quel moment la concevoir? Pourquoi s'arrêter ici plutôt que là dans la division de cette quantité uniforme qu'on appelle la quantité mathématique? Comment introduire des points de repère fixe au sein d'une grandeur en elle-même indéterminée? Cependant l'idée de limite n'est pas un rêve; elle existe ; nous la possédons. Qu'est-elle donc et pour quelle raison l'entendement est-il si invinciblement conduit à affirmer la fin de toute décroissance comme de tout progrès? La limite ne serait-elle pas, en définitive, le terme nécessaire de la grandeur qui s'évanouit, et par suite ne devrait-elle pas entrer sous forme d'élément dans la composition de cette grandeur, comme entre dans le total d'une addition l'unité intégrante ? Nous inclinons à croire que s'il s'est posé ces questions ou des questions analogues, Archimède opta pour l'affirmative sans toutefois se rendre un compte exact des conséquences qu'elle entraînait. Ce que personne ne contestera, c'est qu'il admit à priori et comme d'emblée que les propositions géométriques doivent réussir à l'infini. Or un pareil succès n'est possible que si la limite existe et si elle entretient quelque rapport avec la grandeur.

Mais comment justifier cette admirable anticipation ? Comment faire la preuve évidente pour tous de cette découverte de génie ? Archimède adopta dans ce but une méthode d'un caractère absolument négatif, celle de la réduction à l'absurde, qui lui permit d'établir que toute supposition contraire à la sienne enveloppait une contradiction. C'est ainsi qu'il réussit à démontrer un certain nombre de propositions qui

sont entrées comme autant de théorèmes incontestés dans la science [1], mais qui avaient à ses yeux une valeur apodictique toute spéciale, puisqu'elles donnaient à son hypothèse un appui solide, puisqu'elles lui permettaient d'affirmer qu'entre la grandeur et sa limite il existe un rapport certain.

Un grand nombre de philosophes et de géomètres anciens crurent d'instinct à l'existence de ce rapport. Quelques-uns d'entre eux, usant du double procédé découvert par Archimède et recommandé par son exemple, démontrèrent même que les rapports découverts entre les quantités commensurables pouvaient être étendus aux quantités incommensurables [2], vérité d'une suprême importance et qu'il nous faut soigneusement recueillir. S'il est possible de passer avec succès d'un domaine à l'autre, c'est sans doute parce qu'il est possible de passer avec succès de la grandeur à sa limite, le commensurable et l'incommensurable entretenant précisément entre eux les mêmes rapports.

Et cependant l'antinomie subsistait. La réduction à l'absurde prouvait, à n'en pas douter, que le progrès au sens de la multiplication comme au sens de la division a un terme; mais ce terme situé à l'infini semblait toujours, à qui

1. Archimède établit ainsi que la surface convexe d'un cône droit est égale à l'aire du cercle qui a pour rayon la moyenne proportionnelle entre le côté du cône et le rayon du cercle de la base.

Il prouva de la même façon que l'aire totale de la sphère est quadruple d'un de ses grands cercles, et que celle de l'une quelconque de ses zones est égale à la circonférence du grand cercle multipliée par la hauteur de cette zone. (Voir Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, ch. III.)

D'une façon générale, les anciens géomètres, lorsqu'ils se trouvaient en face d'un problème qui impliquait l'infini, procédaient, ainsi que le fait remarquer Carnot, par voie d'exhaustion, autant que possible bilatérale, puis de réduction à l'absurde.

Partant de cette vérité, par exemple, que les aires des polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs côtés homologues, ils en concluaient que les cercles de différents rayons sont entre eux comme les carrés de ces rayons. (Euclide, 12ᵉ livre, 2ᵉ propos.)

Même mode de démonstration s'il s'agissait d'établir que les volumes des sphères sont entre eux comme les cubes de leurs diamètres; que les pyramides de même hauteur sont comme leurs bases; que le cône est le tiers d'un cylindre de même base et de même hauteur.

2. Voir Carnot, ch. III.

voulait expliquer son existence dans sa pensée, une impossibilité pure. Pour laquelle des deux propositions fallait-il opter? Archimède tenait pour la thèse qui affirme l'existence de la limite et qu'il avait maintes fois soumise à une vérification en règle; mais, au point de vue de la logique et de la spéculation, l'antithèse fondée sur l'impossibilité d'épuiser l'inépuisable demeurait très forte, et l'on ne pouvait prévoir comment se concilieraient des vues en apparence si opposées.

A l'époque où les sciences mathématiques, qui avaient langui depuis des siècles, reprenaient une nouvelle faveur, Galilée et Cavalieri adoptèrent pour leur propre compte le procédé des anciens. Ce dernier alla jusqu'à déclarer que sa méthode n'était qu'un corollaire de la méthode d'exhaustion, corollaire en effet, car l'auteur de la *Géométrie des indivisibles*, tout pénétré de la pensée d'Archimède, n'eut qu'à la développer pour en faire sortir une conséquence d'une portée capitale. Si dans l'analyse, l'infini sépare la grandeur de la limite, dans la synthèse, la limite devenue l'unité intégrante doit être séparée par l'infini de la grandeur à réaliser; toute quantité doit donc être considérée, à ce point de vue, comme la synthèse d'un nombre infini d'éléments de même nature que la limite [1]. La ligne se conçoit comme composée de

1. Nous avons déjà donné à l'aide de plusieurs théorèmes une idée de la géométrie des indivisibles. Nous empruntons à l'ouvrage déjà cité de Carnot le théorème suivant qui permettra d'en prendre une idée plus exacte encore.

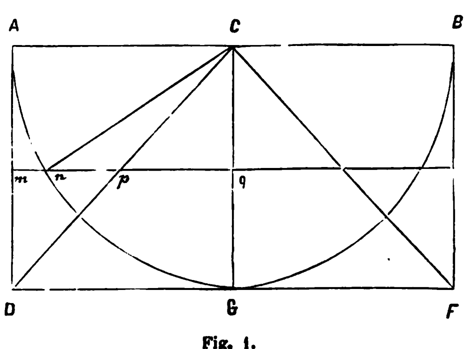


Fig. 1.

Soit AB (voir la figure 1) le diamètre d'un demi-cercle AGB. Soient

points, la surface comme composée de lignes, le volume comme composé de surfaces, à condition que ces points, ces lignes, ces surfaces, soient toujours en nombre infini.

La même difficulté, on le comprend, allait se présenter sous une autre forme. Comment, si le nombre des divisions est infini, aurait-on pu demander à Archimède, est-il possible d'atteindre le dernier quotient? Comment, si le nombre de multiplications est infini, pouvait-on demander à Cavalieri, obtenir jamais le dernier produit, c'est-à-dire la quantité elle-même? Ce grand géomètre, pressé d'objections, s'avoua impuissant à donner de sa méthode une démonstration rigoureuse, et il se préoccupa surtout d'en recueillir les résultats. Des savants distingués, entre autres Pascal et Roberval, suivirent ses traces et durent à la méthode des indivisibles le succès de leurs remarquables travaux sur la cycloïde. Au point de vue de la logique pure, la difficulté était toujours la même; mais la méthode qui pose en principe qu'il existe un rapport, connu ou inconnu, entre la grandeur et la limite,

ABFD le rectangle circonscrit, CG le rayon perpendiculaire à DF. Soient de plus menées les deux diagonales CD, CF, et enfin par un point quelconque *m* de la droite AD soit menée la droite *m*, *n*, *p*, *q*, perpendiculaire à CG, laquelle coupera la circonférence au point *n* et la diagonale CD au point *p*.

Concevons que toute la figure tourne autour de CG comme axe, le quart de cercle ACG engendrera le volume de la sphère dont le diamètre est AB; le rectangle ACGD engendrera le cylindre droit circonscrit, c'est-à-dire ayant même diamètre; le triangle isocèle rectangle CGD engendrera un cône droit ayant les lignes égales CG, DG, pour hauteur et pour rayon de la base; et enfin les trois droites ou segments de droites *mq*, *nq*, *pq* engendreront chacune un cercle dont le centre sera au point *q*.

Or le premier de ces trois cercles est l'élément du cylindre, le second est l'élément de la demi-sphère; et le troisième du cône.

De plus, les aires de ces cercles étant comme les carrés de leurs rayons, et ces trois rayons pouvant visiblement former l'hypoténuse et les deux petits côtés du triangle rectangle, il est clair que le premier de ces cercles est égal à la somme des deux autres, c'est-à-dire que l'élément du cylindre est égal à la somme des éléments correspondants de la demi-sphère et du cône, et, comme il en est de même de tous les autres éléments, il s'ensuit que le volume total du cylindre est égal à la somme du volume total de la demi-sphère et du volume total du cône.

Mais on sait d'ailleurs que le volume du cône est le tiers de celui du cylindre; donc celui de la sphère en est les deux tiers; donc le volume de la sphère entière est les deux tiers du volume du cylindre circonscrit, ainsi que l'a découvert Archimède.

réussissait néanmoins toujours ! Tel était l'état de la question, lorsque Newton survint et y appliqua son génie.

C'est dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* que Newton a exposé la méthode des « premières et dernières raisons ». Empruntons à l'auteur lui-même la définition de ces termes : « La dernière raison d'une quantité est le terme fixe dont cette quantité, considérée comme variable [1], s'approche sans cesse. » « La première raison d'une quantité est le terme fixe dont cette quantité, considérée comme variable, s'éloigne indéfiniment. » On voit, par ces seules définitions, que Newton cherchait à envelopper dans une vaste théorie les deux points de vue distincts de l'exhaustion et de l'intégration auxquels s'étaient placés successivement Archimède dans l'antiquité et Cavalieri dans les temps modernes. Newton donnait encore à ses premières et dernières raisons le nom de premières et dernières valeurs, voulant faire entendre par là que, dans sa pensée, la limite, qu'on la place au point de départ ou au point d'arrivée, entretient d'essentiels rapports avec la grandeur qu'elle permet d'épuiser ou d'intégrer. Si la limite est la dernière valeur d'une quantité évanouissante, elle en désigne une fraction dont le dénominateur nous échappe, mais qui ne saurait être rigoureusement nulle, puisque l'on admet qu'elle a une valeur ; et si, au sens de la multiplication, la limite est la première valeur de la quantité, il faut bien en conclure, encore que Newton ait plus d'une fois hésité à le faire, que c'est l'élément véritable, l'élément absolu de la quantité [2]. — Après Archimède, après Cavalieri, l'illustre

1. Newton appelle *fluente* la variable qui croît ou décroît avec la durée ; le mouvement de la *fluente* comme celui de toute grandeur mathématique est continu, mais selon le sens dans lequel on opère, il a pour limite ou pour élément générateur la *fluxion*. La fluxion est ce minimum qui répond au moment précis où le temps s'annule.

2. Il n'y a aucune distinction à faire entre la méthode des limites et la méthode des premières et dernières raisons, ou des premières et dernières valeurs.

« Newton, dit Carnot, n'en fait aucune : il emploie indifféremment le nom de limite d'une quantité, ou dernière valeur de cette quantité ; limite du rapport de deux quantités, ou dernière raison de ces deux

Anglais admettait donc d'une façon plus ou moins explicite le principe qui avait fait le succès de leurs travaux.

L'idée mère de la méthode des premières et dernières raisons se trouve indiquée dans le lemme premier des *Principes*. En voici la traduction :

« Les quantités, et aussi les raisons des quantités qui, en un temps fini quelconque, tendent vers l'égalité, et avant l'expiration de ce temps s'approchent de l'égalité de plus près que ne le marque une différence donnée, deviennent égales [1]. »

La démonstration est la suivante :

« Si vous niez la proposition, supposez que ces quantités deviennent à la fin inégales, et alors soit *d* leur différence dernière : elles ne peuvent donc s'approcher de l'égalité de plus près que la différence *d*. Or ceci est contre l'hypothèse [2]. »

Cette démonstration semble d'abord enfermer une pétition de principe. On demande en effet de considérer l'état des quantités variables, au moment où elles atteignent le terme de leurs variations ; or c'est précisément ce terme qu'il paraît impossible d'accorder, puisqu'on est convenu *à priori* de les faire varier indéfiniment. L'antinomie déjà signalée reparaît ici à l'état aigu. Newton, comme tous ses devanciers, postule l'existence d'une limite; mais, si cette limite est à l'infini, comment la poser ou seulement la supposer? Aux yeux de M. Renouvier, qui a consacré à l'étude de cette question

quantités. Je fais cette réflexion, ajoute-t-il, parce qu'il y a des personnes qui croient vaguement qu'il existe quelque différence entre la méthode des limites, telle que d'Alembert l'a exposée à l'article DIFFÉRENTIEL de l'*Encyclopédie*, et la méthode des premières et dernières raisons, telle que Newton l'a exposée dans le livre des *Principes*. C'est absolument la même chose, et d'Alembert déclare positivement dans cet article qu'il n'y est que l'interprète de Newton. »

1. Voir *Princ. math.*, liv. III (*De motu corporum*) :

Lemma 1. « Quantitates et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore constanter tendunt, et eo pacto propius ad invicem accedere possunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

2. Prob. « Si negas, sit earum ultima differentia *d;* ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia, *d;* quod est contra hypothesim. »

un article du plus haut intérêt [1], l'argumentation de Newton est radicalement vicieuse. Bien que tendant à l'égalité, les quantités en question ne peuvent, d'après lui, y parvenir, sans empêchement dû à leurs natures respectives. C'est dans la définition même de la quantité mathématique, divisible ou multipliable à l'infini, que l'identité des grandeurs dont on parle rencontrerait un obstacle, et cet obstacle serait invincible.

Nous nous rangerions, sans hésiter, à l'avis du savant critique, si l'énoncé du lemme que nous examinons n'enfermait un détail d'une extrême importance; Newton y introduit en effet une quantité déterminée ou qu'il regarde comme telle, le temps. Ne dit-il pas en termes formels que, avant l'expiration d'une durée finie, l'approximation doit être plus grande que ne le marque une différence quelconque? S'il en est ainsi le mouvement de la quantité n'est possible que dans les limites d'un certain intervalle; la grandeur n'a de jeu qu'en deçà d'un terme fixe expressément désigné par l'hypothèse; or d'autre part, si l'on veut respecter la donnée du lemme, il faut admettre que la variable puisse s'approcher du terme vers lequel elle s'achemine au point de n'en être séparée que par une distance moindre qu'une distance donnée, si petite qu'elle soit. La conclusion qu'impose à la pensée cette double exigence est rigoureuse : la distance, ainsi que l'affirme l'auteur des *Principes*, doit devenir absolument nulle. — Expliquons-nous. — Une différence peut être moindre que toute différence donnée sans être égale à zéro, lorsque la quantité que l'on considère est soumise à un progrès rigoureusement infini; mais dès qu'on admet à terme fixe un repos absolu, la suppression de toute différence est nécessaire. Si d'une part, la quantité ne peut plus fuir, et que de l'autre, l'intervalle qui la sépare d'un certain terme soit moindre que tout intervalle proposé, n'en doutons pas, le terme est atteint, l'intervalle a disparu.

1. *Crit. phil.*, 6e année, n° 7.

Newton, en énonçant en tête des *Principes* le lemme fameux dont nous venons d'expliquer le sens, se fondait, à son insu peut-être, sur un principe mis en lumière par Descartes [1]. Personne peut-être n'a saisi mieux que cet illustre penseur l'esprit même du calcul infinitésimal; personne, à notre avis, ne lui a donné un fondement plus solide. Descartes établit donc en règle générale et comme principe de la méthode des indéterminées, qu'une constante aussi voisine que possible de zéro se confond avec zéro. Voici l'énoncé qui implique cette proposition :

« Si la somme ou la différence de deux prétendues quantités est égale à zéro, et que l'une d'elles puisse être supposée aussi petite qu'on le veut tandis que l'autre ne renferme aucune arbitraire, ces deux prétendues quantités seront chacune en particulier égales à zéro. »

Il est aisé d'établir la légimité de cette affirmation, si importante au point de vue qui nous occupe, qu'elle résume à elle seule, nous espérons pouvoir le démontrer, presque toute la philosophie de la méthode des limites et même de l'analyse infinitésimale sous quelque forme qu'elle se présente. Prenons donc Descartes pour guide.

Soit la formule :

$$A + Bx = 0,$$

dans laquelle le premier terme soit constant et le second susceptible d'être rendu aussi petit que l'on veut. Puisque Bx représente une quantité aussi voisine que possible de 0, il faudra pour satisfaire à l'équation, que le premier terme A diffère lui-même infiniment peu de zéro; mais A, étant une constante, ne peut différer de zéro aussi peu qu'on le désire, car alors ce serait une variable; donc A ne peut être que zéro, donc on a déjà $A = 0$, il reste donc :

$$Bx = 0.$$

1. Carnot, *op. cit.*, ch. III.

Mais zéro étant un terme fixe, la prétendue variable Bx a atteint la limite de sa décroissance, et B est, aussi bien que A, rigoureusement égal à zéro [1].

1. D'autres exemples, en montrant la fécondité de la méthode des indéterminées, mettront en une plus vive lumière le principe de cette méthode. Nous les empruntons à l'ouvrage déjà cité de Carnot.

Il s'agit de prouver que l'aire d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon; c'est-à-dire qu'en nommant R ce rayon, π le rapport de la circonférence à ce même rayon, et par conséquent πR cette circonférence, S la surface du cercle, on doit avoir :

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

Pour cela, j'inscris au cercle un polygone régulier, puis je double successivement le nombre de ses côtés jusqu'à ce que l'aire de ce polygone diffère aussi peu qu'on le voudra de la circonférence πR, et l'apothème aussi peu qu'on le voudra du rayon R; donc l'aire S différera aussi peu qu'on le voudra de $\frac{1}{2} \pi R^2$; donc si nous faisons

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2 - \varphi,$$

la quantité φ, si elle n'est pas égale à zéro, pourra être au moins supposée aussi petite qu'on le voudra. Cela posé, je mets cette équation sous la forme :

$$\left(S - \frac{1}{2} \pi R^2\right) + \varphi = 0,$$

équation à deux termes dont le premier ne renferme aucun arbitraire et dont le second, au contraire, peut être supposé aussi petit que l'on veut; donc, par la théorie des « indéterminées », chacun de ces termes particulier est égal à zéro; donc nous avons :

$$S - \frac{1}{2} \pi R^2 = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2} \pi R^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cet exemple peut servir de preuve ou de vérification à la théorie de Descartes. Non seulement il est acquis, au nom de la logique pure, qu'une constante aussi petite qu'on le voudra doit être considérée comme nulle, mais encore la valeur de cette conception est justifiée par les résultats, puisqu'on arrive, par cette voie, à une conséquence déjà certaine et que d'autres procédés ont mis hors de discussion. — On peut prouver de la même manière que deux pyramides de même base et de même hauteur sont égales entre elles. Concevons ces pyramides partagées en un même nombre de tranches toutes de même hauteur. Chacune de ces tranches pourra évidemment être regardée comme composée de deux parties dont l'une sera un prisme ayant pour base la plus petite des deux bases qui terminent la tranche, et l'autre sera l'espèce d'onglet qui entoure ce prisme.

Si donc nous appelons V, V′ les volumes des deux pyramides, P, P′,

La conclusion qui se dégage du théorème de Descartes est précisément, on le voit, celle à laquelle Newton se rallie : une constante aussi petite que possible est absolument nulle.

les sommes respectives des prismes dont nous venons de parler, q, q', les sommes respectives des onglets, nous aurons :

$$V = P + q \qquad V' = P' + q'.$$

Mais il est clair que $P = P'$; donc :

$$V = P + q, \qquad V' = P + q',$$

et par suite :

$$V - V' = P + q - (P + q') = P + q - P - q'$$

et enfin :

$$V - V' = q - q'.$$

Or cette équation peut être posée ainsi :

$$V - V' - (q - q') = 0,$$

et pour les raisons énoncées plus haut $V - V'$ étant déterminé, $q - q'$ doit se réduire à zéro ; il reste donc :

$$V = V'.$$

La valeur probante de cette démonstration résulte du fait de pousser la variable à sa limite. La variable est ici $q - q'$. Lorsqu'elle a atteint

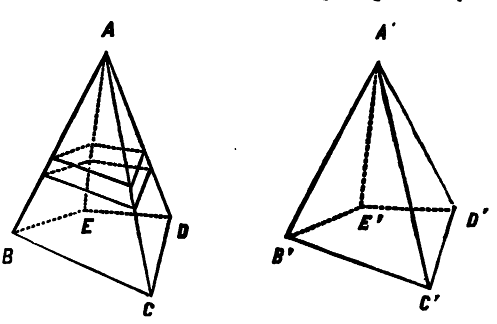


Fig. 2.

le terme zéro, la différence devient rigoureusement nulle entre V et V'.

En effet, si les quantités V et V' sont fixes, elles représentent la limite du pouvoir décroissant de $q - q'$. Or, d'une part, rien ne peut arrêter dans le relatif ce pouvoir décroissant, de l'autre, on exige que ce pouvoir soit épuisé, puisque les quantités V et V' sont fixes : l'exhaustion sera donc complète et les onglets deviendront nuls quand les tranches seront devenues de simples surfaces.

C'est en se fondant sur le principe de Descartes qu'on parvient à démontrer certaines proportions de la plus haute importance dans l'analyse infinitésimale ; on prouve par exemple que la limite de la somme de plusieurs variables est la somme algébrique de leurs limites, et encore

Mais pourquoi? Précisément parce qu'elle est fixe. C'est ce qu'ont compris d'instinct tous les penseurs anciens ou modernes qui se sont posé cette question. Imaginons pour un moment qu'une quantité fixe aussi petite que l'on voudra ne soit pas égale à zéro, il en résultera que cette quantité ne peut s'approcher de zéro autant qu'on le veut, puisqu'elle est maintenue à distance de ce terme minimum, sans que jamais une telle distance, la quantité étant fixe, puisse être supprimée ou même diminuée ; or une telle conséquence est manifestement contraire à l'hypothèse.

On objectera peut-être qu'une seule chose est exigée par l'hypothèse, savoir que la grandeur approche du but autant que possible sans néanmoins l'atteindre. Il serait aisé de répondre que, puisque la grandeur est supposée fixe, il ne s'agit plus d'approximation, mais de proximité.

Dans l'exemple qui précède on n'a donc pas le droit de dire : « Bx s'approche autant qu'on le veut de zéro ; » mais : « Bx est aussi près que possible de zéro. »

Or ce qui est aussi près que possible de zéro ne saurait être que zéro lui-même, car s'il en diffèrait la différence pourrait toujours être représentée par une quantité très petite, φ je suppose; mais on peut prendre la moitié, le quart, le millième, le millionième de φ; il s'ensuivrait que ce qui est censé aussi près que possible de 0, en serait séparé par l'infini.

Il faut donc admettre qu'une quantité fixe aussi voisine que possible de sa limite, en réalité l'a atteinte, et le lemme premier des *Principes*, si paradoxal qu'il semble au premier abord, possède à nos yeux une valeur logique incontestable.

Il est vrai qu'on peut se demander si Newton n'introduit pas arbitrairement une donnée fixe dans l'énoncé de sa proposition. Pourquoi, dira-t-on, ce temps fini et cette nécessité imposée à la grandeur d'atteindre un minimum déterminé avant l'expiration de tel délai? Si d'une part la limite

que la limite de leur produit ou de leur quotient est le produit ou le quotient de leurs limites. (Voir Duhamel, *Éléments du calcul infinités.*, t. I, p. 10 et 11.)

de son progrès est marquée à l'avance par la limite d'une durée certaine et que de l'autre rien n'arrête son mouvement, on comprend assez qu'elle doive atteindre le terme vers lequel elle marche; mais, encore une fois, pourquoi ce terme? Comment même le concevoir si la quantité peut vraiment croître ou décroître à l'infini? Nous touchons à la partie la plus délicate de notre tâche. Une première observation à faire, c'est que tous les savants de génie qui ont abordé le problème y ont laissé pénétrer un élément de détermination, Archimède, Galilée, Cavalieri, et tant d'autres, bien que persuadés de la mobilité indéfinie de la grandeur, croient d'instinct, mais avec une conviction profonde, inébranlable, que le progrès ou la décroissance de cette même grandeur trouve un invincible obstacle dans certaines anticipations de la pensée. Comme ses devanciers, Newton affirme l'existence d'une limite, et s'il ne le dit pas en termes formels, il le fait suffisamment entendre en donnant un terme à la durée qui mesure le mouvement de la grandeur; c'est que, comme ses devanciers il subordonne l'idée du progrès indéfini à l'idée d'un point fixe qui marque un temps d'arrêt absolu. Que ce point puisse être atteint, du sein même de la grandeur dont on suppose le mouvement continu, c'est ce que nul des anciens géomètres n'a admis; autrement l'antinomie apparente deviendrait une contradiction dans les termes; tous cependant ont pressenti l'existence de deux points de vue distincts, opposés même, dont ils devaient, dans une certaine mesure, tenir compte : ici l'indétermination relative à notre ignorance; là au contraire, la détermination nécessaire à la chose en soi, et connue de nous sinon dans la loi certaine qui l'engendre, au moins dans l'élément absolu auquel cette loi s'applique et que nous nommons indistinctement point d'origine ou limite.

On voit quelle est dans cette opposition d'idées la double raison d'être de la thèse et de l'antithèse. J'affirme que telle quantité croissante ou décroissante a sa limite ; voilà la thèse ; elle est parfaitement certaine dans l'absolu, la quan-

tité en soi devant être composée d'éléments déterminés eux-mêmes, et, par suite, la série des divisions et des subdivisions devant, à ce point de vue, rencontrer un terme. Mais l'antithèse, dans le relatif, s'impose avec une nécessité presque égale : le moment de cette rencontre m'étant inconnu, ne puis-je pas, ne dois-je pas dire que le progrès de la quantité, telle qu'elle s'offre à mon imagination, est infini. Une seule restriction m'est imposée, et elle suffit à rendre la conciliation possible : l'infinité que j'affirme n'a rien de réel ; elle n'existe que pour mon intelligence et pour toute intelligence observant la réalité du dehors [1]. A la lumière de cette synthèse, tout s'explique. Où sera maintenant la contradiction si je déclare que l'infini mathématique a un terme? Cet infini est le substitut mental du fini en soi ; il faut donc qu'il finisse lui-même ; s'il ne répond pas exactement à chaque stade du progrès absolu, il faut du moins qu'il en dessine les limites vraies et que, par suite, il commence et se termine là où commence et se termine la réalité correspondante. La science, même à son insu, a toujours obéi à cette loi. Lorsque nous analysons la grandeur idéale, nous avons tous, dirait Pascal, une pensée de derrière la tête, et cette pensée, que nous en ayons ou non conscience, est une réminiscence de l'absolu. Ainsi, lorsque Newton déclare que c'est dans un laps de temps déterminé que la quantité croît ou décroît, c'est qu'il songe, sans y réfléchir peut-être, au terme nécessaire que, dans la réalité en soi, la quantité doit atteindre. Ses devanciers qui fondent tous leurs calculs sur des anticipations de la pensée, font le même acte de foi en l'absolu. Mais que parlons-nous d'anticipations? Inexplicables si elles n'étaient des souvenirs, elles viennent d'une région supérieure à celle de la mathématique qui en fait usage, et, en les introduisant dans la science abstraite pour la vivifier, les grands esprits de tous les âges se sont montrés métaphysiciens autant que

1. Voir F. Ravaisson, *La philosophie en France au XIX[e] siècle*, p. 134, 135, 136 et sqq.
Voir également Ch. Lévêque, *La science de l'Invisible*, 2[e] partie, p. 137.

géomètres ; disons plus : ils ont subordonné la géométrie à la métaphysique comme le relatif à l'absolu, toutes les fois qu'ils ont subordonné l'indéfini de la quantité mobile à un terme fixe. C'est pour nous, métaphysiciens toujours orientés vers la réalité véritable, qu'ils ont travaillé sans le savoir, lorsqu'ils ont demandé au calcul la vérification de cette grande hypothèse, lorsqu'à l'aide de procédés empruntés à leur science propre, et notamment par la réduction à l'absurde, ils ont victorieusement établi que l'idée de limite est toute autre chose qu'une chimère, et que les propositions vraies dans le fini réussissent et doivent réussir à l'infini.

Newton pouvait tirer du lemme premier des *Principes* des conséquences analogues à celles qu'avaient adoptées les premiers créateurs du calcul infinitésimal ; c'est ce qu'il fit. Il démontra après Archimède l'égalité à la limite de trois figures, l'une curviligne, les deux autres polygonales, celle-là inscrite, celle-ci circonscrite à la première, et son procédé nous semble, au point de vue de la logique la plus sévère, irréprochable [1].

1. Le pénétrant critique qui a su mettre en une si vive lumière l'impossibilité logique du nombre infini, M. Renouvier, conteste la valeur de ces déductions. Voici comment il s'exprime au sujet du corollaire du lemme premier :

« Cette conception est inintelligible, alors que d'une part les variations supposées des polygones ne doivent pas avoir de terme, ni par conséquent de limite, et que d'autre part l'identité d'un polygone et d'une courbe est une idée incompatible avec les définitions comparées de l'une et de l'autre. Les dernières raisons sont d'impossibles raisons. »

Impossibles, répondrons-nous, s'il faut vraiment épuiser l'infini pour les atteindre. Mais Newton était-il dupe du terme infini? Ne lui donnait-il pas, avec plus ou moins de conscience, le sens antique et traditionnel du mot grec ἄπειρον? Qui empêche qu'on laisse subsister l'indétermination au sein de la quantité mobile, lorsqu'on connaît *à priori* sa limite? On ne peut confondre, il est vrai, la courbe avec une espèce quelconque de figure polygonale ; aussi, à notre sens, la seule objection décisive qu'on puisse adresser ici au grand physicien viserait moins le procédé en général que l'exemple qu'il propose ; on se demande si la courbe, cette ligne étrange dans laquelle chaque point semble déterminer un changement de direction, est vraiment, et au sens le plus rigoureux du terme, intelligible.

Ne devrait-on pas en mathématiques distinguer les limites nécessaires et certaines, des limites fictives, des limites d'imagination?

Voici d'ailleurs le texte même auquel fait allusion M. Renouvier :

« *Lemma II.* Si in figura quavis A*ac*E, rectis *a*A, AE et curva *ac*E

Il prouva également, en se fondant sur le même principe, que la raison dernière de l'axe, de la corde et de la tangente entre eux est la raison d'égalité. Toutefois, ainsi que le fait

comprehensa, inscribantur parallelogramma A*b*, B*c*, C*d*, etc., sub basibus AB, BC, CD, etc., æqualibus, et lateribus B*b*, C*c*, D*d*, figuræ lateri A*a* parallelis contenta, et compleantur parallelogramma *aKbl*, *b*L*cm*, *c*M*nd*... dein, horum parallelogrammorum latitudo minuatur et numerus augeatur in infinitum, dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta AK*b*L*c*M*d*D, circumscripta A*albmcndo*E et curvilinea A*abcd*E, sunt rationes æqualitatis.

« Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia, est summa parallelogrammorum K*l* + L*m* + M*n* + D*o*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi K*b*, et altitudinum summa A*a*, id est rectangulum AB*la* : sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato ; ergo, per lemma I, figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimo æquales. »

De même, ajoute Newton, les dernières raisons sont encore des raisons d'égalité lorsque les parallélogrammes sont de largeur inégale ; et voici comment il le prouve :

« *Lemma III.* Sit AF æqualis latitudini maximæ et compleatur parallelogrammum FA*af*; hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ ; at latitudine sua AF in infinitum diminuta, minus fit quam datum quodvis rectangulum. »

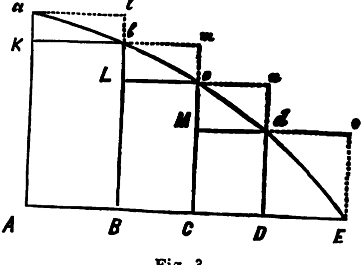


Fig. 3.

Voici maintenant les conséquences qui en découlent :

« *Coroll. I.* Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figura curvilinea. »

« *Coroll. II.* Et multo magis figura rectilinea quæ chordis evanescentium arcuum *ab*, *bc*, *cd* comprehenditur, coincidit ultimo cum figura curvilinea.

« *Coroll. III.* Ut et figura rectilinea quæ tangentibus eorumden arcuum circumscribitur.

« *Coroll. IV.* Et propterea hæ figuræ ultimo non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei. »

Partant de là Newton établissait le théorème suivant, le plus important de tous, selon nous, au point de vue de la métaphysique du calcul infinitésimal :

« *Lemma IV.* Si in duabus figuris A*ac*E, P*pr*T, ut supra, duæ inscribantur parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, et, ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem, dico quod figuræ duæ A*ac*E, P*pr*T, sunt ad invicem in eadem illa ratione. »

N'est-ce pas dire, après Cavalieri, qu'au fond la limite n'est que l'élé-

remarquer M. Renouvier, la pensée du grand géomètre devient parfois indécise et flottante; il semble que, tout en résolvant dans le sens de ses devanciers l'antinomie posée par le calcul infinitésimal, il ait hésité à admettre certaines conséquences logiquement impliquées dans sa théorie, notamment l'existence d'éléments derniers ou d'indivisibles. Il ne peut se résoudre à admettre l'hypothèse de Cavalieri, qu'il juge inconciliable avec l'absence de commune mesure entre certaines grandeurs [1]; aussi s'exprime-t-il parfois en termes qui déconcertent le lecteur et feraient croire que la méthode des limites n'est plus que la méthode des infiniment petits de Leibniz. N'osant aller jusqu'au bout de sa pensée, on dirait que Newton revient en arrière, au risque de se contredire lui-

ment générateur, et que dans des figures égales l'élément générateur est répété un même nombre de fois?

L'objection du nombre infini avait déjà été adressée à Newton et aux mathématiciens de son temps par Berkeley, dans un ouvrage curieux qui a pour titre *The analyst or a discourse addressed to an infidel mathematician* (1734). Cet ouvrage donna lieu, en Angleterre et en France, à des débats animés. Buffon, entre autres, ne pouvait pardonner à l'auteur d'avoir avancé que le calcul infinitésimal ne réussit que par hasard.

A plus forte raison, Berkeley rejetait les infinis de divers ordres négligeables les uns par rapport aux autres. Un des problèmes les plus intéressants qu'il ait agités à ce sujet est le suivant : Quel est l'accroissement que reçoit un rectangle lorsque ses deux côtés reçoivent à la fois différents accroissements que l'on suppose aussi petits que possible? Si l'on procède par les méthodes ordinaires, on a :

$$(A + \alpha)(B + b) = AB + \alpha B + Ab + \alpha b,$$

ce qu'on exprime en disant que l'accroissement du rectangle se compose des rectangles respectifs de chacun des côtés avec l'accroissement supposé de l'autre, plus du rectangle des deux accroissements supposés.

Dans le calcul, on ne tient aucun compte de αb, qui représente le rectangle des accroissements, parce que αb est une quantité infinitésimale du second ordre, c'est-à-dire à l'infini, comme grandeur, des côtés du rectangle proposé. Or c'est là ce que contestait au point de vue d'une logique exacte l'auteur de l'*Analyst :* « *In rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi.* »

Nous sommes ici, contre Berkeley, de l'avis de Newton et de Leibniz, qui pouvaient d'abord répondre que leur procédé était justifié par ses conséquences et qui auraient pu d'ailleurs se fonder sur des raisons d'ordre théorique que nous exposerons plus tard.

1. Cette opinion nous semble étrange; on ne s'explique ce jugement de Newton que si l'on suppose que le célèbre physicien prenait les éléments de Cavalieri pour de petites grandeurs.

même; on sent que l'illustre physicien est troublé par l'opposition du nombre infini et de la limite nécessaire; il ne voudrait surtout, sous aucun prétexte, introduire le déterminé dans l'indéterminé, le fini dans l'indéfini de la grandeur.

« On objectera, dit-il [1], que, si certaines raisons dernières des quantités évanouissantes sont données, des grandeurs dernières sont pareillement données, en sorte que toute quantité se composera d'indivisibles, contrairement à ce qu'Euclide a démontré touchant les incommensurables au X[e] livre des *Eléments* [2]; mais l'objection s'appuie sur une fausse hypothèse :

1. « Contendi potest quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines; et sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus contra quod Euclides de incommensurabilibus in libro decimo *Elementorum* demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt quam pro quavis data differentia, nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates minuuntur in infinitum...... Igitur in sequentibus si quando facili rerum imaginationi consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine determinatas sed cogita semper diminuendas sine limite. » (*Op. citat.*, *ibid.*)

2. On se reportera avec intérêt au texte d'Euclide et à la démonstration que Newton invoque contre les partisans de la théorie des indivisibles; il nous semble que cette démonstration ne saurait les atteindre; on va d'ailleurs en juger. — L'illustre géomètre commence par établir que les grandeurs commensurables sont entre elles dans le rapport d'un nombre à un autre nombre, et la preuve est aisée à faire par la définition même des commensurables, qui veut qu'on puisse porter un nombre exact de fois sur les grandeurs en question une même commune mesure. Euclide s'attache ensuite à la proposition inverse :

Prop. 6. « Les grandeurs incommensurables ne sont point entre elles dans le rapport d'un nombre à un autre nombre. »

Πρότασις ϛ'. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Voici la preuve :

Ἔστω ἀσύμμετρα τὰ μεγέθη A, B. — Λέγω ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

A ————————————————

B ——————————————————

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ A τῷ B· οὐκ ἐστὶ δέ, οὐκ ἄρα τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ἔχει, etc., etc.

L'auteur des *Éléments* a purement et simplement démontré que deux incommensurables ne sont point entre eux dans le rapport d'un nombre de *grandeurs* à un autre nombre de *grandeurs*, si petites qu'on les suppose, et en cela il n'a fait qu'analyser la notion géométrique de l'incom-

ces dernières raisons avec lesquelles les quantités s'évanouissent (*quacum evanescunt*) ne sont pas, à vrai dire, les raisons des quantités dernières, mais les limites dont s'approchent incessamment les raisons des quantités qui décroissent sans limites, et dont elles peuvent approcher de plus près que d'une différence donnée quelconque, mais qu'elles ne peuvent dépasser ni même atteindre avant que les parties diminuent à l'infini... Si donc dans la suite et pour faciliter l'intelligence des choses, je nomme certaines quantités les moindres, ou évanouissantes, ou les dernières, qu'on se garde bien de penser à des quantités déterminées de grandeur, mais qu'on entende bien qu'elles sont diminuables sans limites. »

Dans ce passage, Newton cherche visiblement à se disculper du reproche de vouloir composer la grandeur au moyen de quantités dernières et irréductibles. D'après lui, toute quantité est divisible à l'infini. Oui assurément, si l'on reste dans la quantité; mais est-il possible d'y rester? Voilà la question; l'idée de limite s'impose. Admettons pourtant avec Newton qu'entre la grandeur initiale et sa limite il y ait l'infini. On pourra toujours demander si un tel infini est autre chose que l'infini de convention qui se confond avec l'indéterminé mathématique, et dans cette hypothèse, la seule acceptable, toute contradiction disparaît.

mensurabilité; mais il ne suit nullement de cette proposition que les incommensurables ne soient point entre eux dans le rapport d'un nombre d'éléments à un autre nombre d'éléments; s'il en était ainsi, les incommensurables ne pourraient ni être engendrés ni être conçus. Que serait-ce par exemple que deux lignes qui n'auraient absolument rien de commun, ni longueur, si petite qu'on l'imagine, ni élément? A quel titre les appeler lignes? Comment prendre sur l'une de ces lignes un point quelconque? Ce qui est vrai, c'est que, comme nous ne savons pas à quel moment l'élément générateur se rencontre dans l'absolu, nous ne pouvons jamais le supposer dans le relatif, et il nous semble dès lors que l'incommensurabilité n'a plus de limites. Mais une telle apparence n'a de raison d'être que dans l'enceinte de la grandeur où le géomètre doit nécessairement se confiner.

S'il en est ainsi, Newton pouvait, semble-t-il, sans compromettre aucune proposition scientifiquement établie, admettre après Cavalieri l'existence d'indivisibles, et, de fait, limite et indivisible étant synonymes, la méthode des limites conduit nécessairement et quoi qu'on fasse à concevoir l'existence d'éléments ultimes et absolus.

Newton corrige lui-même sa pensée lorsqu'il dit :

« On nous oppose qu'il n'existe pas de rapport dernier des quantités évanouissantes ; car, avant qu'elles soient évanouies, leur rapport n'est pas le dernier, et, après qu'elles sont évanouies, il est nul..... La réponse est facile..... On doit entendre, par la raison dernière des quantités évanouissantes, la raison non pas avant ou après, mais la raison avec laquelle les quantités s'évanouissent [1]. »

Cette explication ne peut guère laisser subsister de doutes sur le fond de la pensée du grand géomètre. Avant que les quantités soient évanouies, ce sont encore des quantités, et, par suite, elles peuvent décroître à l'infini, la grandeur flottant indéterminée entre son point d'origine et le nombre qui la représente ; après qu'elles se sont évanouies, il ne reste rien, et le zéro absolu échappe à toute comparaison et à tout calcul ; au moment même où elles s'évanouissent, elles atteignent la limite de leur décroissance, limite située à égale distance de la grandeur proprement dite et du néant pur, puisque, d'une part, entre la grandeur et sa limite, l'infini mathématique s'interpose, et que, de l'autre, le néant pur est séparé de l'unité élémentaire par un abîme qu'aucune progression ne saurait franchir. Comment donc représenter la limite s'il faut dans le calcul la désigner par un nombre? Par le zéro de grandeur, c'est-à-dire par un symbole qui fasse entendre que la limite, sans être de la nature de la quantité, ne peut se confondre avec le néant absolu. Le zéro de grandeur est donc un zéro relatif,

« 1. Objectio est quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio quippe quæ antequam evanescunt non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pergentis velocitatem ultimam : hanc enim antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est. Per velocitatem ultimam intelligi eam qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tum quum attingit, id est illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum et quacum motus cessat.

« Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt.

« Pariter et ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. »

zéro de composition ou d'étendue, non de réalité [1]. Phénomène digne de remarque! Plus Newton essaye de séparer sa cause de celle de Cavalieri, plus ses principes, qui au fond sont les mêmes, l'entraînent à des conséquences analogues. Cavalieri, avant Newton, avait très nettement aperçu la distinction qu'on doit faire entre la limite d'un évanouissant et le néant pur, entre l'absence de grandeur et l'absence de quoi que ce soit, puisqu'il représentait ce milieu de l'unité élémentaire que l'imagination ne saurait se représenter mais que la raison conçoit et affirme, à l'aide du zéro relatif, du zéro qui n'exclut que la quantité [2].

Malgré des hésitations dont nous avons saisi la trace, Newton fut donc peu à peu ramené à son point de départ, c'est-à-dire à la doctrine constante de ses devanciers; il ne voulut plus considérer que le dernier rapport, c'est-à-dire la limite même des évanouissants. Partant de ce principe que dans les sciences mathématiques aucune erreur n'est négligeable, il se refusa à introduire dans ses calculs ces infiniment petits qui décroissent toujours, mais n'ont jamais atteint, au moment où on les considère, la fin de leur décroissance. Aussi dans cet ordre de problèmes où l'on considère le rapport de deux variables, fonctions l'une de l'autre, qui tendent à s'annuler suivant une même loi, les relations ultimes furent-elles seules admises et représentées par le schème numérique $\frac{0}{0}$, fraction dont le numérateur comme le dénominateur marquent que les grandeurs qui diminuent ont enfin rencontré la limite de toute diminution, c'est-à-dire l'élément au delà duquel on n'aperçoit plus que le néant pur.

On a objecté à Newton que le rapport $\frac{0}{0}$ répondant à une quantité quelconque [3], ne pouvait désigner telle relation plutôt

1. Nous parlons ici en général. Dans les problèmes particuliers le zéro en question est non-seulement un zéro de grandeur, mais encore le zéro de telle grandeur spécifiée et définie (voir plus loin le problème de la tangente).

2. Voir plus haut le théorème de Cavalieri relatif à la mesure de l'aire du triangle.

3. Ce rapport est en effet le symbole de l'indéterminé mathématique.

que telle autre ; mais il est aisé de comprendre que l'indétermination inhérente à ce symbole disparaît dès que l'on tient compte de la loi de continuité qui l'a fourni. Ecoutons sur ce point le judicieux auteur des *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal :*

« Il ne faut pas perdre de vue que ces quantités nulles ont ici des propriétés particulières comme dernières valeurs des quantités indéfiniment décroissantes dont elles sont les limites, et qu'on ne leur donne la dénomination particulière d'évanouissantes qu'afin d'avertir que, de tous les rapports ou relations dont elles sont susceptibles en qualité de quantités nulles, on ne veut considérer et faire entrer dans les combinaisons que celles qui leur sont assignées par la loi de continuité, lorsqu'on imagine le système des quantités auxiliaires s'approchant par degrés insensibles des quantités désignées [1], et c'est là précisément ce qu'entend Newton lorsqu'il dit que les quantités évanouissantes sont des quantités considérées non avant qu'elles s'évanouissent, non après qu'elles se sont évanouies, mais à l'instant même qu'elles s'évanouissent.

« Soit le cercle RMDIB (voir p. 178) ; menons la tangente MT et abaissons la perpendiculaire MP sur DB. Maintenant, par un point R, puis arbitrairement à une distance quelconque du point M, soit menée la ligne RS parallèle à MP, et par les points R et M soit menée la sécante RT′, soit enfin abaissée la perpendiculaire MZ sur RS.

« Nous aurons évidemment T'P : MP :: MZ : RZ, et par suite T'P ou $TP + TT' = MP \frac{MZ}{RZ}$. Cela posé, si nous imaginons que RS se meuve parallèlement à elle-même en s'approchant continuellement de MP, il est visible que le point T′ s'approchera en même temps de plus en plus du point T, et qu'on pourra par conséquent rendre la ligne T′T aussi petite qu'on le voudra. Mais ce système d'approximations indéfinies ne paraît pas suffisamment rigoureux à Newton ; en effet, tant que RS ne

1. Par quantités désignées, Carnot entend des quantités déterminées, invariables.

coïncide point avec MP, la fraction $\frac{MZ}{RZ}$ est plus grande que $\frac{TI}{MI}$
Ces deux fractions ne deviennent rigoureusement égales qu'a moment où MZ et RZ se réduisent à 0 [1]. Il est vrai qu'alor

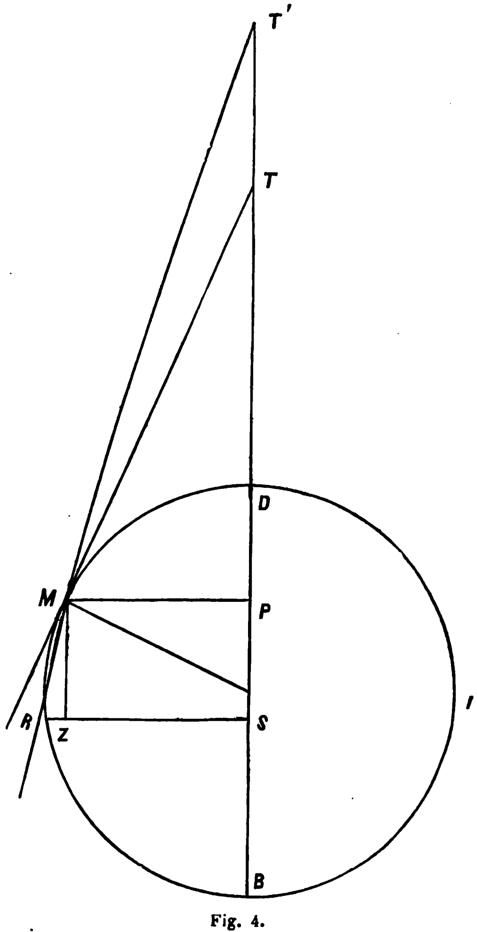


Fig. 4.

$\frac{MZ}{RZ}$ est aussi bien égale à toute autre quantité qu'à $\frac{TP}{MP}$ puisque $\frac{0}{0}$ est une quantité absolument arbitraire; mais, parmi les di-

1. C'est-à-dire se réduisent à deux points limites coïncidant en M.

verses valeurs qu'on peut attribuer à $\frac{MZ}{RZ}$, $\frac{TP}{MP}$ est la seule qui soit assujettie à la loi de continuité et déterminée par elle; car, si l'on construisait une courbe dont l'abscisse fût la quantité indéfiniment petite MZ et l'ordonnée proportionnelle à $\frac{MZ}{RZ}$, celle qui répondrait à l'abscisse nulle serait représentée par $\frac{TP}{MP}$ et non par une quantité arbitraire. Or c'est ce qui distingue les quantités évanouissantes de celles qui sont simplement nulles. Ainsi, quoiqu'en général on ait :

$$0 = 2 \times 0 = 3 \times 0 = 4 \times 0 \ldots,$$

on ne peut pas dire d'une quantité évanouissante telle que MZ, MZ = 2MZ.= 3MZ....., car la loi de continuité ne peut assigner entre MZ et MZ d'autre rapport que celui d'égalité ni d'autre relation que celle d'identité [1]. »

Ce n'est donc que dans le cas où le zéro serait considéré comme absolu que le symbole $\frac{0}{0}$ deviendrait le synonyme de l'indétermination pure; le zéro relatif qu'admettent à la fois Cavalieri et Newton représente la quantité au moment où elle s'évanouit, c'est-à-dire la limite; et, comme telle limite est étroitement liée à telle grandeur, le zéro relatif a toujours une signification déterminée.

D'autre part, nulle erreur, si petite qu'elle puisse être, n'est plus à craindre, puisque la limite marque l'épuisement complet, absolu de la quantité.

Résumons-nous. La méthode des limites, qu'elle se nomme méthode d'exhaustion, méthode des indivisibles ou méthode des premières et dernières raisons, est d'une rigueur absolue et n'a contre elle qu'un algorithme d'un usage moins facile et l'ambiguïté du terme infini. Il est certain que, si l'on donne à ce terme sa signification littérale et rigoureuse, la méthode des limites implique une contradiction flagrante; comment en effet se représenter la limite d'une quantité qui par hypo-

1. Carnot. *Op. cit.*, p. 118.

thèse se développe sans limite? De là l'inquiétude visible et l'embarras des plus grands esprits, lorsqu'ils ont tenté de faire la théorie de leurs calculs et de rendre compte du succès de leurs procédés scientifiques. Mais si l'on se fait une idée exacte de la quantité idéale, si l'on tient compte de ses deux indispensables facteurs, l'un relatif, l'autre absolu, l'antinomie disparaît, et la méthode à laquelle se sont attachés tant d'illustres géomètres semble décidément fondée en raison.

II

A la méthode que nous venons de décrire s'oppose la méthode toute subjective de Leibniz, qui écarte de parti pris l'idée de limite pour ne faire appel qu'à la notion de grandeur indéfiniment croissante ou décroissante. Nous croyons avoir déterminé avec une précision suffisante le principe fondamental de la théorie du grand métaphysicien : à la quantité annulée, parce qu'elle atteint son terme, il substitue la quantité en voie de diminution indéfinie, au zéro de grandeur, l'incomparable, à la limite véritable, la quantité aussi voisine qu'on le veut de cette limite, la *différentielle* enfin. De quelle utilité est pour le savant l'introduction de la quantité infinitésimale dans le calcul, nous l'avons dit ; reste à savoir comment ce qui est pratiquement si utile est théoriquement légitime. L'algorithme de Leibniz réussit ; il est même d'un emploi plus facile que celui de Newton. Pourquoi réussit-il, et quelle est la raison mystérieuse qui fait que deux théories en apparence opposées obtiennent néanmoins le même succès? Faut-il croire que, dans les régions supérieures de la mathématique, la pensée humaine soit livrée aux mêmes illusions et aux mêmes antinomies qu'on a relevées plus d'une fois, à tort ou à raison, en métaphysique? Devons-nous renoncer à la théorie pure et estimer avec le philosophe Berkeley [1] que les succès qu'invoquent en leur faveur et mettent à

1. Berkeley. *The analyst.* Voir la note p. 172.

leur actif tant de méthodes diverses soient des succès de hasard?

On comprendra notre hésitation à entrer dans ce grave débat; mais la solution qu'on demande est après tout du ressort de la logique; à ce titre, il nous sera permis de la chercher.

Disons-le sans détour, il nous paraît certain que, si la méthode de Leibniz réussit, c'est pour des raisons étrangères à celle que le grand métaphysicien a fait valoir et analogues à celles qui assurent le succès de la méthode des limites : nous allons essayer de le prouver.

L'incomparable est une quantité véritable. Comment donc expliquer qu'on puisse le retrancher d'une formule sans en troubler l'équilibre et sans nuire au résultat?

On se souvient de la réponse de Leibniz :

« L'incomparable fait l'effet d'un infiniment petit rigoureux, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre énonciation, il s'ensuit par notre calcul que l'erreur sera toujours moindre que celle qu'il pourra assigner... »

Un des interprètes les plus autorisés de la pensée du philosophe fait sienne cette ingénieuse théorie et l'expose de façon à lui donner toute la vraisemblance qu'elle comporte [1]. D'après lui, la méthode infinitésimale est une méthode d'approximation, mais d'approximation indéfinie, et c'est l'indéfini de l'approximation qui en fait la rigueur. « Cette méthode, dit-il, permet l'introduction de quantités continues quelconques dans le calcul, sous le symbole de celles qui, étant mesurables et demeurant indéterminées, ne diffèrent des premières que d'une quantité arbitrairement petite. Or, tout autant que la substitution est seulement supposée et qu'on ne sort pas des relations exprimées en général pour en venir aux opérations arithmétiques, la théorie est pleinement rigoureuse. Il est vrai que l'on considère systématiquement au lieu des quantités proposées d'autres quantités; mais l'erreur est indéterminée, toujours inassignée et arbitraire, et *a posteriori* on prouve qu'elle est inassignable et nulle en ce sens, puisque

1. Renouvier, *Critique philosophique*, 6e année, n° 2; *Essais de critique générale, Logique*, t. I, p. 408,409.

le géomètre a toujours pu envisager une différence moindre que celle qu'on objecte, quelque petite qu'elle soit. »

En d'autres termes, la limite et la grandeur étant incommensurables, on crée pour les besoins du calcul des infiniment petits aussi voisins que possible de la limite, mais de la même nature que la grandeur, et par suite commensurables avec elle.

Le problème peut se généraliser. « En résumé, dit M. Renouvier, les propositions de géométrie élémentaire par lesquelles on se propose d'établir des rapports entre deux quantités incommensurables A et B doivent pour la rigueur se réduire à la convention suivante : — Si A est la limite de figure d'une série de quantités a, a', a'' et si B est la limite des figures d'une série de quantités b, b', b'', etc., etc., respectivement commensurables avec les premières, $\frac{A}{B}$ sera le symbole d'un rapport arithmétique tel que $\frac{a^m}{b^m}$, dont les termes a^m et b^m, demeurant indéterminés peuvent être supposés différer géométriquement de A et de B par une figure de grandeur moindre qu'une quantité assignée ou assignable de fait, quelque petite que soit celle-ci; en sorte que l'erreur attachée à la considération de la variable au lieu de sa limite géométrique, ou de la limite géométrique au lieu de la variable, seule et toujours commensurable, ne puisse être assignée, et doive nécessairement être tenue pour nulle dans la théorie [1]. »

Le principe sur lequel s'appuient Leibniz et les partisans de sa doctrine est, on le voit, celui-ci : une erreur, dès qu'elle est inassignable, devient nulle. La doctrine vaudra ce que vaut cette proposition ; examinons-la.

Il convient de remarquer, en premier lieu, que la quantité infinitésimale et l'erreur à laquelle sa suppression paraît

1. Cf. Duhamel, *op. cit.*, t. I, ch. VI. — Voir également la préface du même ouvrage : « Dans toutes ces recherches on fait un fréquent usage d'un principe général très-simple qui consiste en ce que la limite d'une somme d'infiniment petits n'est pas changée quand on altère ses éléments de quantités infiniment petites par rapport à eux-mêmes. »

devoir donner naissance, sont deux termes qui varient parallèlement. Que cette quantité décroisse sans fin, l'erreur diminuera toujours sans jamais disparaître; que cette même quantité au contraire ait une limite, et l'erreur pourra se réduire à zéro. Je demande maintenant ce qui se passe lorsque je traite une formule algébrique par le procédé infinitésimal? Au moment où, dans l'équation sur laquelle j'opère, je supprime la variable pour ne plus laisser subsister que des quantités déterminées, je puis mettre un contradicteur au défi de signaler une erreur précise, la variable n'ayant elle-même rien de déterminé; mais il ne s'ensuit nullement, en bonne logique, que cette erreur devienne nulle; pour qu'elle fût telle, il faudrait que la quantité infinitésimale qu'on retranche de l'équation eût, de degrés en degrés, atteint la limite 0. Alors, mais alors seulement, la formule que l'on traite resterait exacte. Il n'en est point ainsi dans la réalité des choses : par définition, l'infiniment petit peut toujours décroître, sans jamais rencontrer le terme de ses divisions; il en résulte que l'erreur à laquelle sa soustraction donne lieu, *toujours inférieure à une erreur assignée, est toujours supérieure à une erreur nulle.* — Qu'on veuille bien se placer au cœur même de l'hypothèse de Leibniz et se rendre un compte exact de ses exigences. — L'incomparable introduit dans le calcul est une quantité, et une quantité dont le jeu, bien qu'indéfini, n'est possible qu'au sein du domaine de la grandeur; il lui est interdit d'en sortir et de se confondre jamais avec sa limite; quelque multiples que soient les réductions qu'on imagine, l'infiniment petit demeure infiniment divisible; il ne saurait ni franchir ni même atteindre la ligne d'enceinte en deçà de laquelle il évolue; c'est à peine si l'on peut dire qu'il s'en approche, puisqu'il en est toujours séparé par l'infini. Vous pouvez donc tant que vous le voudrez soutenir que l'erreur occasionnée par sa suppression est toujours plus petite, à un moment donné, que celle qu'on propose; je soutiendrai, de mon côté, qu'elle est toujours plus grande que ne le voudrait celui qui croit pouvoir la négliger. J'ajou-

terai que le même intervalle qui sépare l'incomparable décroissant de sa limite, sépare l'erreur subsistante de l'erreur nulle, et cet intervalle est, par définition, infranchissable. Que m'importe, après tout, de savoir que l'erreur que je commets est toujours moindre que je n'imagine, si je suis sûr de la commettre, si je sais d'avance qu'elle flottera entre telle erreur que je conçois et l'erreur zéro que je me vois forcé d'exclure?

On comprend qu'une telle conception ait donné lieu à de graves malentendus. Dans la méthode des limites, l'idée préconçue d'un terme vient corriger ce qu'a d'excessif l'hypothèse de l'infini. On a toujours pressenti, nous l'avons vu, qu'un infini qui a sa limite, doit être un infini de convention, une fiction utile dont on peut ne pas toujours rendre compte, mais qu'on ne saurait prendre absolument au sérieux. On n'en saurait dire autant de l'infini de Leibniz. Ou l'on suppose que toute erreur a disparu du calcul, et alors, qu'on le sache ou non, on déclare que l'insommable est sommé, que ce qui est sans terme est terminé; ou l'on recule devant cette contradiction, et dès lors le calcul n'est plus qu'approximatif. Il est très remarquable que tous les esprits d'élite qui se sont attachés à la théorie de Leibniz l'aient poussée jusqu'à l'une ou à l'autre de ces deux alternatives : — ou l'infini existe, — ou l'erreur subsiste; — il n'y a pas logiquement de milieu. La première opinion fut professée par les frères Bernouilli et par Fontenelle, la seconde par Buffon au dix-huitième siècle et dans le nôtre par le mathématicien philosophe Auguste Comte.

L'argumentation de Jean Bernouilli était certes de nature à embarrasser l'auteur du nouveau calcul. « Si vous admettez, lui disait-il, qu'une série convergente, sommable, de termes décroissants à l'infini suivant une certaine loi, existe réellement, il est nécessaire que tous ces termes existent et avec eux le dernier de tous, qui est donc un infiniment petit réellement donné; et de même pour une série croissante, à commencer par celle des nombres naturels 1, 2, 3, 4..... S'il existe

une infinité de ces termes, il doit en exister un infinitième, par la même raison que dix exigeraient le dixième en rang des dix, et cent le centième en rang des cent... Et l'infinitième à son tour ne marque pas une limite, puisque tout nombre peut incontestablement être augmenté d'une unité et de deux, et de trois... C'est seulement une série nouvelle qui commence, toute formée des nombres infinis de grandeur, et le cas est analogue pour le décroissement et les infinis de petitesse [1]. »

« Fontenelle, dit Renouvier, admit, comme Bernouilli, l'existence réelle du nombre infini après les nombres finis, puis des nombres infinis à la suite du premier d'entre eux, puis des nombres infinis du second ordre que la logique oblige à considérer par rapport à ceux du premier, quand on a une fois considéré ceux-ci par rapport aux nombres ordinaires et finis. Comme il n'y a pas moyen de s'arrêter dans cette voie, on arrive à une infinité d'infinis successifs et à une infinité d'infinités d'infinités... ce qui ressemble à une gageure ridicule. Même phénomène mental dans l'ordre de la descente. Il y a des lois géométriques, démontrées, indéniables, qui obligent à poser telle quantité variable comme décroissante comparativement à une seconde quantité, dans le même rapport que celle-ci, décroît comparativement à une troisième; il suit de là que si la seconde devient infiniment petite par rapport à la troisième, la première doit de toute nécessité devenir infiniment petite par rapport à la seconde, qui est déjà infiniment petite. Si l'on attribue la réalité à l'infiniment petit, il faut également l'attribuer à l'infiniment petit du second ordre, et puis à celui du troisième ordre en vertu d'un raisonnement semblable, et cela sans fin [2]. »

On peut s'étonner de voir Bernouilli et Fontenelle admettre, au nom même et en vertu de l'hypothèse de Leibniz, la réalité du nombre infini. Cependant si l'on se place un moment au point de vue du grand métaphysicien, on com-

1. *Critique philosophique*, *loc. citat.*
2. *Critique philosophique*, *loc. citat.*

prendra que leur opinion a sa raison d'être. Que dis-je ? Dans cette donnée, elle est seule intelligible. L'arithmétique est, on le sait, un système de notations abstraites : ses nombres servent à représenter les fractions de l'étendue ou les phases successives du mouvement. Que la série :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots\cdots$$

ait pour limite le nombre 2, c'est ce qu'il est aisé de concevoir, si l'on subordonne l'idée de l'indéfini à celle de son terme nécessaire, le nombre indéterminé des divisions possibles de l'étendue ou des étapes possibles du mouvement, à la notion d'une borne dont l'absence dans la réalité en soi serait absolument inintelligible. L'infinité d'une série conçue comme elle l'est d'ordinaire dans la méthode des limites n'est donc qu'une infinité provisoire et virtuelle [1]. Mais, du moment où l'on substitue à cet infini limité l'infinitésimal sans limites, la question change de face. Si l'on croit pouvoir, en vue d'éviter toute chance d'erreur dans les calculs, assimiler l'incomparable décroissant au terme dont il approche toujours, *on franchit une distance par définition infranchissable, on épuise l'infini.* En conséquence, il faut admettre, pour représenter la somme des divisions parcourues, l'existence réelle d'un nombre infini et celle d'un nombre infinitième répondant au dernier terme de cette somme; l'arithmétique doit traduire dans son vocabulaire propre les événements qui se

1. Dans une série arithmétique, comme celle que nous venons d'indiquer :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \text{ etc.},$$

il est clair que l'idée de limite ne s'impose qu'en vertu des souvenirs de sciences moins abstraites, comme la géométrie et la mécanique. Si ces souvenirs étaient totalement effacés, on pourrait soutenir que l'idée de la limite 2, par exemple, n'existe pas. En effet, une limite qui ne peut être atteinte n'est pas une limite. — On pourrait la concevoir, répond-on, comme une chose dont on approche toujours. — Il est impossible d'approcher d'un terme si l'on ne doit finalement l'atteindre; dans l'infini, on n'approche pas; le mouvement même est contradictoire.

passent au-dessous d'elle, à une moindre distance de la réalité véritable, en géométrie et en mécanique.

Ce n'est pas tout. Dans la méthode objective que nous avons analysée la première, l'idée de limite absolue engendre et explique parfaitement l'idée de limite relative. On conçoit sans difficulté l'existence de certaines grandeurs étagées les unes au-dessus des autres et séparées les unes des autres par des séries d'insensibles transitions, indéterminées pour nous, déterminées en elles-mêmes. De la grandeur génératrice à la grandeur engendrée, il existe un intervalle que comble seule la loi de génération; or c'est précisément cette loi de génération qui nous échappe; en conséquence, autant d'intervalles semblables, autant d'infinis, mais d'infinis de convention auxquels il est aisé de donner un sens compatible avec celui de limite. Plaçons-nous maintenant au point de vue de Leibniz. Chacune des quantités en question doit être réellement séparée par l'infini de celle qui la précède ou qui la suit. En effet, chacune des séries qui servent de transition de l'une à l'autre devient dans l'hypothèse de l'infinitésimale *une série sans fin qui néanmoins s'achève, bref un infini qui se réalise*. Dès lors, l'arithmétique est tenue de représenter par des symboles appropriés cet étrange phénomène; il faut admettre des nombres infinitièmes du premier, du second, du n^e degré, ainsi que le demandent Bernouilli et Fontenelle. Ces deux mathématiciens, on ne saurait trop le répéter, n'ont fait que pousser à sa limite logique l'hypothèse de Leibniz, et, s'il en résulte des conséquences d'une absurdité palpable, c'est moins la faute des interprètes, dont les déductions sont rigoureuses, que celle de la théorie qui, les portant en son sein, devait successivement les produire au jour, comme la monade, la série continue de ses progrès.

La contradiction du nombre infini est si grossière, qu'un certain nombre de savants n'ont voulu voir dans la méthode de Leibniz qu'une méthode de simple approximation; autre erreur, car la méthode réussit, et elle ne peut réussir, que si elle est absolument exacte. Ce n'est pas l'algorithme, valable,

on le verra, pour des raisons spéciales, c'est la théorie qu'il eût fallu critiquer. Quoi qu'il en soit, ni Buffon au XVIIIe siècle, ni plus tard Auguste Comte n'ont consenti à admettre que l'intervalle qui sépare l'incomparable de sa limite pût être comblé, et cette répugnance fait honneur à la rigueur de leur esprit. Ils affirment donc que, en prenant l'un pour l'autre, on commet nécessairement une erreur, et, que par suite la théorie infinitésimale ne fonde qu'un calcul d'à peu près. Buffon, après avoir établi que l'épuisement de l'infini est impossible [1], essaye de montrer que les formules de la nouvelle notation ne seraient exactes que si l'infini était réellement épuisé, et il en conclut que la méthode qui s'autorise du nom de Leibniz n'a rien de commun avec la vieille exactitude mathématique. Comte, citant la phrase célèbre dans laquelle Leibniz demande qu'il soit permis de négliger les infiniment petits ou incomparables vis-à-vis des quantité finies, comme des grains de sable par rapport à la mer, se fait de ce texte une arme contre la rigueur de la théorie qu'il critique, et va jusqu'à accuser son illustre adversaire de n'avoir entrevu que vaguement les véritables fondements de l'analyse. « Il est impossible, dit-il, de prévoir à quel point les opérations successives peuvent grossir ces erreurs premières dont l'accroissement pourrait même ainsi devenir quelconque. »

Nous ne savons ce que répondrait à une objection aussi précise et aussi nettement formulée un partisan des incomparables. Quant à la comparaison de Leibniz, il se peut qu'elle n'ait d'autre but que de rendre sa pensée accessible au vul-

1. Buffon critiqua sévèrement l'hypothèse du nombre infini. « Il paraît, dit-il, que les nombres doivent, à la fin, devenir infinis, puisqu'ils sont toujours susceptibles d'augmentation. A cela je réponds que cette augmentation dont ils sont susceptibles prouve évidemment qu'ils ne peuvent être infinis. Je dis de plus que, dans ces suites, il n'y a point de dernier terme, que même leur supposer un dernier terme c'est détruire l'essence de la suite qui consiste dans la succession de termes qui peuvent être suivis d'autres termes, et ces autres termes encore d'autres, mais qui tous sont de la même nature que les précédents, c'est-à-dire tous finis, tous composés d'unités. Ainsi, lorsqu'on suppose qu'une suite a un dernier terme, et que ce dernier terme est un nombre infini, on va contre la définition du nombre et la loi générale des suites. »

gaire; il est certain toutefois que, si l'infini ne s'épuise pas, la quantité infinitésimale n'est jamais annulée, et que par conséquent l'erreur subsiste, fuyante, mais réelle. La comparaison des grains de sable a donc dû s'offrir d'elle-même à la pensée du grand métaphysicien, parce qu'elle a dans sa théorie une raison d'être; nous ne ferons qu'une réserve : Les grains de sable constituent une quantité fixe dont il serait par conséquent toujours possible de déterminer le rapport à une autre quantité fixe, si grande qu'on l'imagine, tandis que l'incomparable varie arbitrairement entre une grandeur donnée et zéro, zéro exclu. L'erreur, dans la doctrine de Leibniz, est donc arbitraire, au lieu que dans la comparaison qu'il emploie, elle est déterminée et toujours la même. Mais une erreur arbitraire n'est point une erreur nulle, surtout si l'on pose en principe qu'elle ne peut, de diminution en diminution, atteindre la limite inférieure qui est zéro. C'est ce que ne voit pas le philosophe. Dans le passage relatif aux grains de sable, il dit textuellement : « J'ai donné un jour des lemmes des incomparables dans les actes de Leipzig, qu'on peut entendre comme on veut, soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. » Au point de vue de la théorie pure, cependant, comment confondre des infinis véritables parce qu'ils sont rigoureux, avec des infinis qui ne le sont pas? Dira-t-on que dans cette dernière hypothèse le calcul d'approximation est au moins un calcul d'approximation indéfinie, faute, pour l'analyste, de pouvoir assigner un terme à l'erreur? La réponse est facile. C'est justement parce qu'on ne peut assigner de terme à l'erreur que l'erreur subsiste; c'est parce que l'approximation est indéfinie que c'est toujours une approximation et rien de plus. Soutenir, pour échapper à cette conséquence, que, de division en division, la grandeur infinitésimale s'élimine d'elle-même, c'est, nous l'avons dit, heurter un autre écueil, c'est, après s'être soustrait au reproche d'inexactitude, encourir celui de contradiction. Encore une fois, comment expliquera-t-on que la grandeur décroissante parcoure un intervalle in-

défini et l'épuise? Dans la méthode des limites, je sais ou du moins je pressens que ce qui est pour moi indéfini est fini en soi ; or un intervalle fini, alors même qu'il me serait inconnu, peut toujours être épuisé. Ici, au contraire, nulle arrière-pensée; sortir de la quantité, c'est sortir de l'hypothèse; la limite n'est plus au terme d'une série subjectivement indéterminée, mais d'une série telle qu'il implique contradiction qu'on l'achève; dans une pareille donnée, il est clair que l'assimilation de l'incomparable à sa limite, assimilation pourtant nécessaire, lorsque l'on tient à purger une formule de toute erreur, réalise le nombre infini. Nous n'échappons aux objections de Buffon et d'Auguste Comte que pour admettre, avec Bernouilli et Fontenelle, l'existence d'un infini de quantité dont l'impossibilité logique n'est plus à démontrer aujourd'hui.

Comment donc expliquer que l'analyse infinitésimale réussisse? Les faits lui donnent raison; est-il possible que la logique lui donne tort? On va le voir, le succès des procédés qu'employait Leibniz est dû à de toutes autres raisons que celles qu'il croyait devoir invoquer; les opérations de l'algorithme donnent à sa méthode, sans qu'il paraisse en avoir suffisamment démêlé la cause, toute la valeur et toute la portée de la méthode des limites, la seule qui soit théoriquement valable. Après Archimède, Galilée, Cavalieri, Newton, Leibniz ne fait donc, sous couleur d'opposition, que prêter à cette méthode une forme nouvelle et la mettre en un nouveau jour; c'est du moins ce que nous nous proposons d'établir. Si nous parvenons à rendre sensible aux yeux cette admirable unité, nous n'aurons pas seulement travaillé, pour notre modeste part, à une justification de la raison pure, de cette raison tant critiquée qui pourtant se montre toujours d'accord avec elle-même; nous aurons montré que c'est la notion métaphysique de limite qui vivifie à la fois le calcul ordinaire et le calcul infinitésimal; que la mathématique enfin ne vaut avec tous ses procédés et sous toutes ses formes que par un souvenir du concret et de l'absolu, que par une vérité importée du monde de la quantité en soi dans le monde imaginaire du savant.

Venons au fait. La raison véritable du succès de l'analyse avait été entrevue par notre immortel Descartes lorsqu'il se proposa de fonder sur un principe solide son calcul des indéterminées. Nous ne l'avons point oublié, le géomètre philosophe établit qu'une quantité arbitraire en relation avec une quantité fixe d'une part, et zéro de l'autre, devient fixe elle-même et atteint sa limite. Cette vérité rigoureusement démontrée n'est qu'un cas particulier de la loi suivante, non moins certaine :

Toute quantité arbitraire en relation avec des quantités constantes perd, par ce seul fait, ce qu'elle a en soi de mobile et d'indéfini, et doit être portée mentalement à la limite de sa décroissance ou de son progrès.

Nous nous proposons d'établir la légitimité de cette loi en empruntant à l'un des plus fidèles interprètes de la pensée de Descartes, à l'auteur des *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* la remarquable démonstration qu'il en donne :

« Pour atteindre le but, la preuve doit franchir plusieurs stades successifs. Nous n'avancerons donc que pas à pas.

« I. Posons d'abord en principe que deux quantités non arbitraires ne peuvent différer que d'une quantité non arbitraire.

« En effet, les deux quantités proposées n'étant pas arbitraires, on ne peut rien changer ni à l'une ni à l'autre, et par suite on ne peut rien changer à leur différence ; donc cette différence n'est point arbitraire [1].

« II. Si cette première proposition est vraie, la proposition suivante l'est également :

« Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être aussi petite qu'on le veut.

« En effet, soient P et Q, les deux quantités non arbitraires proposées ; nous venons de voir que leur différence ne saurait être arbitraire : elle ne peut donc être supposée aussi petite qu'on le veut, ce qui est contre l'hypothèse ; donc cette pré-

1. Carnot, *Réfl. sur la mét. du calc. inf.*, p. 23.

tendue différence n'existe pas; donc les deux quantités proposées P et Q sont rigoureusement égales [1].

« On remarquera qu'une telle conclusion résulte d'une double exigence de la pensée. D'une part, nous introduisons une quantité aussi petite qu'on le désire, c'est la différence; de l'autre nous la juxtaposons à d'autres quantités qui lui imposent la nécessité d'être fixe. Une quantité aussi petite qu'on le veut et en même temps fixe, ne peut être que zéro. Le rapport que la grandeur mobile entretient avec des grandeurs définies n'est donc concevable que si la première est représentée par sa limite.

« III. Allons plus loin : Toute quantité qu'on est maître de supposer aussi petite que l'on veut, peut être négligée comme absolument nulle en comparaison de toute quantité qui ne peut être comme la première supposée aussi petite qu'on le veut, sans que les erreurs qui peuvent naître ainsi dans le cours du calcul puissent en affecter le résultat, du moment que toutes les quantités arbitraires en seront éliminées [2].

« En effet, en négligeant comme absolument nulles les quantités qui peuvent être supposées aussi petites que l'on veut, lorsqu'elles se trouvent ajoutées à d'autres qui ne peuvent de même être supposées aussi petites que l'on veut, il est évident que les erreurs qui pourront en naître dans le calcul ou en affecter le résultat, pourront être pareillement supposées aussi petites que l'on voudra; donc il restera dans ce résultat quelque chose d'arbitraire, ce qui est contre l'hypothèse, puisque toutes les quantités arbitraires sont supposées entièrement éliminées. »

La valeur probante de ce nouveau théorème est tout entière, on le voit aisément, dans les exigences de la pensée que nous avons signalées plus haut. Il est donc établi que, mise en rapport avec des quantités définies, la quantité infinitésimale devient nulle; par suite, il est certain que les différences que l'infiniment petit représente n'existent que pour

1. Carnot, *ibid.*, *loc. citat.*
2. Carnot, *ibid.*

notre imagination; en réalité, elles se réduisent à zéro, parce que les relations que la grandeur mobile entretient avec la grandeur fixe ont précisément pour effet de pousser la première à sa limite. Disons donc que les incomparables, très utiles en vue de fixer la pensée du calculateur et de lui fournir un schème sensible, deviennent nuls, en vertu non de leur définition, mais de leurs rapports. On ne fait, en définitive, qu'écarter une fiction et que rentrer dans la vérité des choses, lorsque, le calcul auquel ils sont nécessaires une fois terminé, on les supprime; et cette suppression peut se faire aussi impunément que s'il s'agissait du zéro de Fermat ou des zéros de Cavalieri et de Newton; que dis-je? Il est logiquement indispensable qu'elle ait lieu; autrement, la limite revêtirait l'apparence de la grandeur et troublerait ainsi le résultat définitif. Bref, les infiniment petits peuvent être introduits, mais il est de toute nécessité, si l'on tient à obtenir une formule exacte, qu'on les retranche.

Pour mettre la théorie en pleine lumière, prenons un exemple, celui de la tangente, auquel nous avons de nouveau recours, parce qu'il est à la fois d'une extrême simplicité et d'une portée considérable, et traitons d'abord le problème au point de vue de Leibniz.

On propose de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD (voir fig. 5, p. 194).

Soit C le centre du cercle, DCB l'axe; supposons l'abscisse DP $= x$, l'ordonnée correspondante MP $= y$, et soit TP la sous-tangente cherchée.

Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un très grand nombre de côtés. Soit MN un de ces côtés. Prolongeons-le jusqu'à l'axe. Ce sera évidemment la tangente en question, puisque cette ligne ne pénétrera pas dans l'intérieur du polygone. Abaissons de plus la perpendiculaire MO sur NQ parallèle à MP, et nommons a le rayon du cercle. Cela posé, nous aurons évidemment:

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{TP}}{y}.$$

D'autre part l'équation de la courbe étant pour le point M, $yy = 2\,a\,x - xx$, elle sera pour le point N :

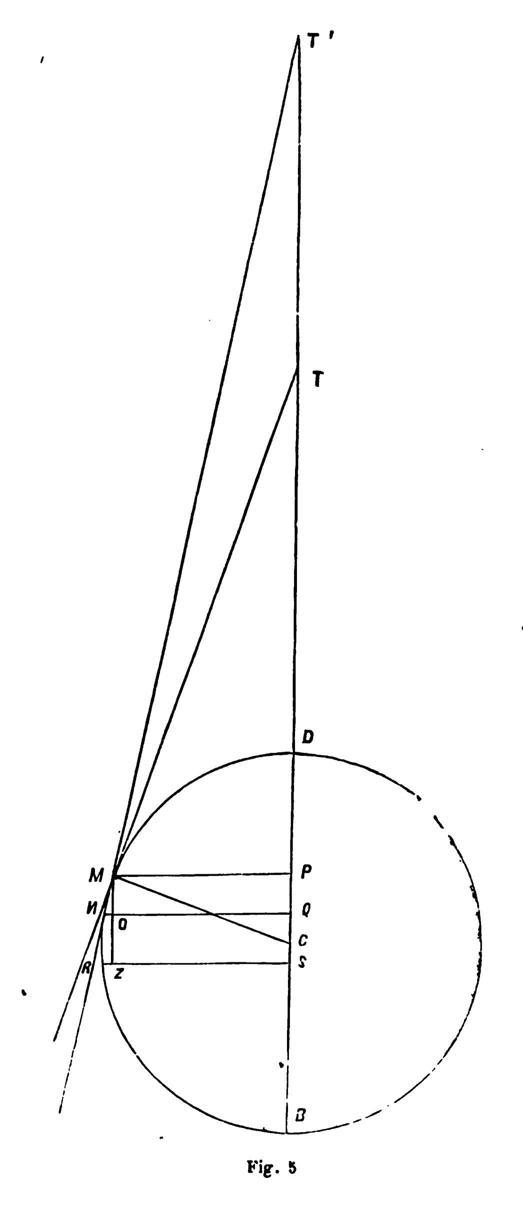


Fig. 5

$$(y + NO)^2 = 2\,a\,(x + MO) = (x + MO)^2.$$

Otant de cette équation la première trouvée pour le point M, et réduisant, on a :

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a - 2x - MO};$$

Egalant donc cette valeur de $\frac{MO}{NO}$ à celle qui a été trouvée ci-dessus et multipliant par y, il vient :

$$TP = \frac{y\,(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

Si donc MO et NO étaient connues, on aurait la valeur cherchée de TP; or ces quantités MO, NO sont très petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN, qui par hypothèse est lui-même très petit; donc on peut négliger *sans erreur sensible* ces quantités par rapport aux quantités $2y$ et $2x - 2a$ auxquelles elles sont ajoutées. Donc l'équation se réduit à :

$$TP = \frac{y^2}{a - x}$$

ce qu'il fallait trouver [1].

Raisonner ainsi serait raisonner conformément à la théorie de Leibniz ; or il arrive en fait que non seulement l'erreur n'est pas sensible, mais qu'elle est absolument nulle. L'équation

$$TP = \frac{y^2}{a - x}$$

est de la plus parfaite exactitude, et c'est l'équation dans laquelle entrent les infiniment petits MO et NO qui serait inexacte si on leur donnait une valeur quelconque. On peut s'assurer aisément de l'exactitude de l'équation purgée d'infiniment petits, en cherchant TP d'après le principe que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon ; car il est visible que les triangles semblables CPM, MPT donnent :

$$\frac{CP}{MP} = \frac{MP}{TP},$$

1. Voir Carnot, *op. cit.*, ch. I, p. 9.

d'où l'on tire :

$$\mathrm{TP} = \frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{CP}} = \frac{y^2}{a - x},$$

comme ci-dessus.

Comment donc, dans l'équation

$$\mathrm{TP} = y\,\frac{(2y + \mathrm{NO})}{2a - 2x - \mathrm{MO}},$$

a-t-il pu se faire qu'en négligeant MO et NO on n'ait point altéré la justesse du résultat, ou plutôt comment ce résultat est-il devenu exact par la suppression de ces quantités, et pourquoi ne l'était-il pas auparavant?

Remarquons que l'hypothèse d'où l'on était parti était fausse, car il est absolument impossible qu'un cercle puisse être jamais considéré comme un vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ses côtés. Conséquemment, il a dû résulter de cette hypothèse une erreur quelconque dans l'équation

$$\mathrm{TP} = \frac{y(2y + \mathrm{NO})}{2a - 2x - \mathrm{MO}};$$

erreur, il est vrai, d'autant moindre que MO et NO sont considérés comme plus petits; supprimer de telles quantités, c'est donc, à le bien prendre, rectifier le calcul, et l'opération dont il s'agit est non seulement permise, mais nécessaire. Nous n'avons pas d'autre moyen d'exprimer exactement les conditions du problème.

Tient-on à écarter les derniers voiles et à pénétrer jusqu'à la plus secrète raison de la légitimité de ces calculs, on verra que la première équation

$$\mathrm{TP} = \frac{y(2y + \mathrm{NO})}{2a - 2x - \mathrm{MO}},$$

approximative en apparence, est déjà exacte en soi, pourvu que l'on sache l'interpréter et regarder comme nulles les valeurs fictives MO et NO, qui, d'une part, indéfiniment décroissantes, sont, d'autre part, ajoutées à des quantités fixes

ou retranchées de ces mêmes quantités. Fondés sur le principe même de la méthode des indéterminées, nous ne voulons lire sous les quantités arbitraires MO, NO que le zéro de Fermat, ce zéro représentant exactement, pour nous, l'état d'un infiniment petit que ses rapports avec des grandeurs constantes ont poussé à sa limite. Les métaphysiciens du calcul infinitésimal ne s'y sont pas trompés; ils ont fait voir, Lagrange entre autres, que, en substituant leurs infiniment petits ou leurs incomparables au zéro dont nous parlons, Barrow [1] et Leibniz n'avaient guère créé qu'un système nouveau de notation. Rien ne nous semble plus certain. Le schème seul diffère; la valeur exprimée reste la même, c'est-à-dire absolument nulle.

Que voulons-nous dire en effet lorsque nous posons la première équation? Que les côtés du polygone doivent être aussi petits que possible pour que cette équation soit exacte? Soit; mais, dans le cas où toutes les valeurs corrélatives sont déterminées, où il est entendu, par exemple, que la tangente existe, qu'on l'a enfin rencontrée, la décroissance des côtés MO, NO ne peut plus être considérée comme indéfinie, et l'expression « aussi petits que possible » n'a plus qu'un sens, celui de limite. Si donc nous laissons subsister, dans la formule primitive, des apparences de quantités, comme MO, NO, c'est avec l'arrière-pensée d'en purger la formule finale et d'annuler en fait ce qui en droit est déjà nul sous un schème de convention.

Carnot affirme que, en retranchant de l'équation définitive les infiniment petits, on supprime une cause d'erreur; nous dirions plutôt une occasion ou un prétexte d'erreur, car enfin on n'a le droit d'éliminer les infiniment petits que parce que déjà ils ne comptent plus comme quantités. Dans le problème de la tangente, par exemple, la formule finale est moins, à notre sens, la formule primitive rectifiée que cette même

1. Barrow, 1630-1677, maître de Newton. Il montra combien l'analyse moderne diffère peu de la méthode d'Archimède et simplifia la méthode de Fermat.

formule exprimée comme elle doit l'être lorsqu'on donne aux termes MO et NO leur valeur exacte. Descartes a donc, si nous ne nous trompons, pénétré au cœur de la théorie ; c'est une pensée de notre immortel géomètre qui doit réconcilier Leibniz et Newton.

Si nous avions maintenant à répondre aux objections qui furent adressées à Leibniz et aux partisans de son algorithme, il nous semble que nous le ferions sans trop de peine.

— Le procédé infinitésimal est-il un procédé d'approximation ?

— Nullement; les faits sont pour nous, ils attestent que nos formules sont d'une exactitude rigoureuse; l'algèbre ordinaire conduit à des résultats absolument identiques à ceux que nous obtenons par le calcul de l'infini.

— Mais alors, l'erreur réduite à zéro, la quantité infinitésimale a atteint sa limite, et, comme cette limite est à l'infini, il faut que l'inépuisable ait été épuisé. Flagrante contradiction !

— La contradiction est inévitable, nous l'avouons, si l'on ne tient compte que de la quantité infinitésimale ; considérée en elle-même, isolée de tout rapport, une telle quantité ne peut atteindre le terme de ses divisions possibles; mais ce n'est là qu'un élément du problème, et le problème veut être posé avec toutes ses conditions. Or voici une de ses exigences : la quantité infinitésimale se trouve en relation avec des quantités fixes; dès lors elle s'annule, non pour des raisons intrinsèques ou résultant de son essence même, ce qui impliquerait en effet une contradiction formelle, mais pour des raisons nouvelles et tout extérieures, qui tiennent à l'introduction de grandeurs constantes, et corrigent, en la restreignant, la définition de l'infiniment petit. La quantité qui d'elle-même, et en obéissant aux seules lois de sa nature, décroîtrait sans cesse, voit, par suite d'un obstacle venu du dehors, se terminer sa décroissance ; la théorie de Leibniz est ainsi ramenée à la théorie de ses devanciers. En tout état de cause, il faut admettre, d'une part, une grandeur qui ne se

refuse à aucune division et qui, considérée en elle-même, diminuerait à l'indéfini; de l'autre, une limite *directement* ou *indirectement* imposée à cette grandeur; *directement*, si l'on pose en principe que l'absolu est au terme du relatif, c'est le cas d'Archimède, de Cavalieri, de Newton; *indirectement*, si l'on dissimule derrière des quantités fixes qui l'impliquent, l'intervention nécessaire du même absolu, c'est le cas de Leibniz et de tous ceux qui ont adopté ou adoptent la méthode infinitésimale.

En définitive, cette pensée de derrière la tête que nous avons surprise chez tous les devanciers de Leibniz, cette idée absolue de limite, nécessaire à la science, Leibniz crut pouvoir s'en passer; mais ses calculs étaient disposés de telle sorte qu'elle y pénétrait à son insu et malgré lui, corrigeant secrètement les erreurs que sa théorie eût laissé s'y introduire. Phénomène étrange! Les procédés du philosophe n'étaient rigoureux qu'au nom même et par la vertu efficace d'un principe qu'il aurait voulu proscrire [1]!

Nous avons cherché à concilier les divers systèmes en les ramenant à une pensée unique. Il n'est pas jusqu'aux conceptions plus modernes de Lagrange qui ne s'expliquent, semble-t-il, par le principe que nous avons invoqué. Lagrange, on le sait, écarte de parti pris toute considération d'évanouissants, de limites, de fluxions et même d'infiniment petits, pour n'admettre dans ses calculs que des quantités finies. Les différentielles sont simplement des grandeurs très petites; elles ont toutefois un caractère spécial qui permet de les distinguer des grandeurs ordinairement employées dans le calcul : elles demeurent toujours *indéterminées*, de sorte que, pendant tout le cours des opérations, on reste maître, ainsi que le fait re-

1. Est-il besoin de faire observer que les considérations qui précèdent expliquent l'annulation réelle, et par suite la suppression légitime d'un infini d'ordre quelconque comparé à un infini d'ordre supérieur? Une variable ne peut indéfiniment décroître que par rapport à un terme fixe, sans quoi, sa décroissance serait inintelligible; or ce terme fixe est l'infini d'ordre supérieur qui, en vertu des principes précédemment posés, doit l'annuler.

marquer Carnot, de les rendre aussi petites que l'on veut, sans rien changer à la valeur des quantités dont on cherche la relation. Au fond, il n'existe entre ce point de vue et celui auquel s'était placé Leibniz aucune différence essentielle, un incomparable étant de toute nécessité, *à un moment quelconque de son progrès*, une quantité finie. Leibniz insiste sur la loi de décroissance indéfinie de la quantité arbitraire ; Lagrange cherche plutôt à mettre en lumière ce fait qu'une telle décroissance n'est possible que par une série de moments, et qu'à chacun de ces moments répond une grandeur toujours plus petite, mais toujours finie. Lagrange semble donc avoir conçu les infiniment petits de Leibniz avec plus de netteté que Leibniz lui-même, qui les avait qualifiés beaucoup moins pour ce qu'ils sont en réalité à chaque étape que pour ce qu'ils pourraient être s'ils passaient sans fin de l'une à l'autre.

« Il est facile, dit Carnot, de remarquer l'analogie qui existe entre la théorie des fonctions analytiques et celle du calcul infinitésimal.... En effet, les différences prises sans rien négliger, comme on le fait dans la théorie des fonctions analytiques par la formule de Taylor, sont des séries. Or, comme l'observe Lagrange lui-même, tous les problèmes dont la solution exige le calcul différentiel dépendent uniquement du premier terme de chacune de ces séries, et toutes les méthodes n'ont d'autre but que de détacher et d'isoler, pour ainsi dire, ce premier terme du reste de la série. Le calcul différentiel ordinaire remplit immédiatement son objet, en négligeant tous les autres, comme s'ils étaient nuls.... Dans la théorie des fonctions, on les fait réellement entrer dans l'expression des conditions du problème, et on les dégage ensuite par diverses transformations, fondées sur ce que tous ces termes ont pour facteur commun un accroissement de variable qu'on est maître de supposer aussi petit qu'on veut, tandis que le premier terme de la série reste indépendant. »

Il résulte de cet exposé que dans le calcul des fonctions, aussi bien que dans le calcul infinitésimal, c'est le principe de

Descartes qui fonde la légitimité des procédés, et le principe de Descartes n'est qu'un appel à l'idée de limite.

Résumons-nous : la quantité mathématique renferme deux éléments : l'un, relatif, répond à son contenu et mérite le nom d'infini, parce qu'il est pour nous souverainement indéterminé; l'autre, absolu, sert de terme et d'origine à la grandeur. L'analyse infinitésimale fait appel à ces deux notions, qui lui sont également indispensables, parce qu'elles sont toutes deux essentielles; cependant elle ne les met pas toujours en une égale lumière : de là deux méthodes, l'une objective, qui tient compte de l'idée de limite; l'autre subjective, qui se fixe ou prétend se fixer dans la quantité décroissante. Au fond, nous l'avons vu, ces deux méthodes n'en font qu'une, car la grandeur mathématique veut être analysée tout entière, contenant et contenu ; toute abstraction qui élimine l'un de ces termes est violente : à l'insu même de l'opérateur, le facteur éliminé reprend sa place, et corrige, sans que d'abord on s'en aperçoive autrement que par le résultat, les calculs que son absence eût faussés.

La mathématique et la physique, qui semblent d'abord si opposées, sont loin d'être étrangères l'une à l'autre. La grandeur réelle prête à la grandeur abstraite le plus important des deux éléments qui la constituent, la limite. Le contenu des choses nous échappe, nous n'en saisissons que le dessin : ce dessin, à la vérité, comme tout ce qui est absolu, ne peut être représenté aux yeux : nul n'imaginera jamais la surface, la ligne ou le point; c'est pour cela même le plus sûr de notre science.

Ce qui passe et passera toujours notre intelligence finie, c'est la loi de génération qui, dans le réel, ajoute l'élément à l'élément et crée ainsi les divers degrés de la grandeur; mais telle est l'industrieuse activité de la raison, qu'elle réussit dans une certaine mesure à compenser cette ignorance fatale. Le champ de l'indéterminé, ouvert devant elle, paraissait devoir être à jamais stérile : elle l'exploite, en y multipliant à l'infini ses points de repère, qui par là deviennent

aussi voisins qu'on le désire des points de repère véritables; le calcul infinitésimal n'a pas d'autre objet : qu'il différencie ou qu'il intègre, il propose une méthode de génération toute subjective, mais ajustée, dans la mesure de nos moyens, à la réalité des choses. Le miracle de la science humaine, c'est d'avoir su adapter l'infini et le continu de la pensée au fini et au discontinu de la nature.

7

CHAPITRE III

LES ANTINOMIES MATHÉMATIQUES DE KANT

Kant, au lieu d'opposer la raison à elle-même, oppose la raison à l'imagination, le concret à l'abstrait.
Première antinomie. — L'infiniment grand. — Thèse. — Il n'existe pas. — C'est le point de vue objectif ou le point de vue de la quantité en soi. — Antithèse. — Il existe. — C'est le point de vue de l'imagination ou le point de vue de la quantité idéale.
Deuxième antinomie. — L'infiniment petit.
La thèse et l'antithèse sont calquées sur la thèse et l'antithèse précédentes. — Kant raisonne en physicien dans la thèse, en mathématicien dans l'antithèse. — Dans les deux antinomies mathématiques, la raison reste parfaitement d'accord avec elle-même, et, lorsque ses réponses varient, c'est que les points de vue ont varié.

Si les deux points de vue du concret et de l'abstrait, auxquels nous venons de nous placer successivement en traitant de la quantité physique et de la quantité mathématique, avaient été suffisamment distingués par l'auteur de la *Critique de la raison pure*, les antinomies mathématiques manquaient de base; elles n'existent en effet que par suite d'un malentendu. Dans la thèse et dans l'antithèse, on envisage la question sous deux aspects différents, sinon opposés; ici, l'on prend pour objet la grandeur réelle, là au contraire la grandeur purement intelligible. Et l'on s'étonne, lorsque les données varient, que l'entendement modifie les conclusions! Voudrait-on qu'il confondît les points de vue que l'on confond soi-même? C'est alors, mais alors seulement, qu'il serait bon de mettre sa légitimité en doute. Nous nous proposons d'établir que, loin

de se blesser avec ses propres armes, la raison sort victorieuse du combat auquel l'a provoquée le grand critique, et que les antinomies destinées à lui faire échec ne font que mettre en une plus vive lumière sa supériorité comme instrument de connaissance.

I

La première antinomie mathématique pose le problème de l'infiniment grand. Kant cherche à établir que l'infiniment grand existe à la fois et n'existe pas, en d'autres termes que l'univers est et n'est pas infini dans le temps et dans l'espace.

A la lumière des théories précédentes, on peut montrer que ces deux propositions sont vraies, la première au point de vue subjectif, qui est celui de l'imagination, la seconde au point de vue objectif, qui est celui de la raison pure. Si l'on s'attache à la réalité considérée en elle-même, si le monde que l'on conçoit est affranchi de certaines exigences toutes subjectives de l'entendement, il ne saurait être qualifié d'infini; c'est du moins ce qui résulte des propositions relatives à la quantité concrète, propositions démontrées dans la première partie de cette thèse; un monde infini serait une contradiction réalisée. Dans l'abstrait, les conclusions sont et doivent être toutes différentes. L'Univers que la pensée prend alors pour objet est représenté à l'imagination sur le modèle et d'après les lois de la quantité mathématique; or, nous le savons, cette quantité est susceptible d'accroissements à l'indéfini. A ce point de vue on peut donc soutenir que l'infiniment grand existe; mais c'est un infiniment grand de convention, œuvre fragile de la pensée, dont il ne fait qu'imiter le progrès sans fin. Un tel Univers n'est au fond qu'une forme de l'entendement, un rêve de géomètre; c'est ce qui résulte, croyons-nous, de la seconde partie de notre thèse et de l'examen auquel nous avons soumis la notion de l'infinité potentielle, inhérente à l'abstrait et au continu.

On remarquera d'ailleurs, et cette observation est loin d'être

pour nous sans intérêt, que Kant raisonne en physicien lorsqu'il cherche, dans la thèse, à établir que le monde n'est pas infini, qu'au contraire il pense et parle en géomètre, lorsque, dans l'antithèse, il veut prouver que l'Univers est sans bornes. A son insu, le célèbre critique passe successivement d'un rôle à l'autre et fait parler sous le même nom deux personnages; c'est ce curieux dédoublement que notre analyse se propose de rendre sensible.

Ramenée à sa plus simple expression et affranchie de toutes les considérations de détail qui l'embarrassent, voici la thèse [1].

« La synthèse des parties d'un monde infini est impossible.

« Or la synthèse des parties constitutives du monde est faite.

« Donc le monde n'est pas infini. »

Une telle argumentation défie la critique. Kant, du point de

1. La démonstration de Kant est divisée, comme la thèse elle-même, en deux parties.

Thèse :

Le monde a un commencement dans le temps et des limites dans l'espace.

Démonstration :

I. Supposons en effet que le monde n'ait pas de commencement dans le temps; alors, à chaque instant de la durée, une éternité entière sera écoulée, et avec elle une série infinie d'états successifs des choses dans le monde; or l'infinité d une série consiste précisément en ce que cette série ne peut jamais être accomplie par une synthèse successive; donc la série des états antérieurs du monde ne peut être infinie, et par conséquent c'est une condition nécessaire de l'existence du monde qu'il ait eu un commencement: premier point qu'il fallait démontrer.

II. Supposons maintenant que le monde n'ait pas de limites dans l'espace; alors il forme un tout infini, composé de choses qui apparaissent toutes ensemble; or nous ne pouvons nous faire une idée de la grandeur d'un composé qui n'est point enfermé dans de certaines bornes sensibles par aucun autre moyen que par la synthèse successive des parties, et concevoir la totalité d'un tel composé que par l'accomplissement de cette synthèse, c'est-à-dire de l'addition successive des diverses unités partielles; ainsi donc, pour que nous venions à nous faire l'idée du monde, considéré comme un tout qui remplit tous les espaces, il faut que nous puissions regarder la synthèse infinie et successive des parties du monde comme accomplie et parfaite, ou, en d'autres termes, le temps que l'on doit employer à nombrer toutes ces parties apparaissant ensemble comme entièrement écoulé, bien qu'infini, ce qui est d'une impossibilité manifeste. C'est pourquoi l'universalité des choses qui apparaissent dans la réalité ne peut être considérée comme un tout véritablement donné et, par conséquent, comme un ensemble existant; donc le monde n'a pas une étendue infinie, mais est renfermé dans de certaines limites: second point qu'il fallait démontrer.

vue objectif où il se place, ne peut pas ne pas tenir compte des exigences attachées à l'hypothèse de la réalité véritable. Par suite, l'Univers qu'il envisage est une grandeur concrète, une chose en soi, indépendante des lois de l'imagination qui, en se la représentant, pourrait l'exagérer ou l'amoindrir. A ce point de vue, nul progrès à l'indéfini n'est possible, car l'indéfini ne peut qualifier que l'abstrait ; la pensée créatrice, en réalisant l'être, le détermine nécessairement et le définit. D'autre part, l'infinité actuelle est contradictoire. La conclusion s'impose inévitable ; l'Univers est borné, et cette conclusion, la raison pure la prend à son compte, sans se soucier de la faculté imaginative qui, attachée tout entière à l'apparence, ne peut suffisamment démêler, dans ses représentations, ce qui est de la chose en soi et ce qui est de l'esprit.

C'est la faculté imaginative, au contraire, qui fait tous les frais de l'antithèse [1]; elle néglige, de parti pris, l'une des conditions essentielles du problème ; elle s'affranchit de la

1. Voici l'antithèse, telle que l'a exposée Kant.

Antithèse :

Le monde n'a point de commencement dans le temps, ni de limites dans l'espace; la durée et l'étendue du monde sont toutes deux infinies.

Démonstration :

I. Supposons que le monde ait un commencement. Dire qu'une chose a un commencement, c'est dire qu'avant elle un certain temps s'est écoulé où elle n'existait pas; il faut donc qu'un certain temps se soit écoulé pendant lequel le monde n'existait pas, c'est-à-dire qu'il y ait eu un temps vide ; or, dans un temps vide, nulle existence ne peut commencer, car il n'y a dans un temps de cette sorte aucun moment qui offre, de préférence aux autres, une raison suffisante pour que l'existence vienne y prendre la place du néant. Ainsi donc, plusieurs systèmes d'êtres pourront se développer successivement dans le monde; mais le monde lui-même ne peut avoir de commencement, et il existe depuis un temps infini.

II. Quant au second point, supposons d'abord que le monde ait des limites et soit circonscrit dans l'espace; il se trouve alors dans l'espace vide, qui n'a, lui, aucunes bornes; donc il faut admettre que les choses ont non seulement des rapports mutuels dans l'espace, mais qu'elles ont aussi une relation à l'espace. Mais comme le monde est un tout complet, hors duquel l'expérience n'a plus rien à découvrir et qui n'a pas, comme on dit, de terme corrélatif avec lequel il soutienne un rapport déterminé, le rapport du monde à l'espace vide devient une relation à un pur néant. Mais une telle relation, et par conséquent la limitation du monde par l'espace vide est entièrement chimérique; donc le monde n'a point de bornes dans l'espace; en d'autres termes, l'étendue du monde est infinie.

considération, pourtant indispensable, d'un quantum déterminé en soi, et, subordonnant la réalité à la fiction, elle plie les exigences du dehors au schème tout subjectif de l'indéterminé et du continu. Dès lors, c'en est fait. Le monde, modelé sur la pensée, grandit comme elle, et s'enfle avec nos conceptions; comme l'ombre suit le corps, cet univers idéal suit le progrès de la fantaisie qui le crée, et il ne paraît le dépasser que lorsqu'il exprime le pouvoir que nous avons de l'agrandir encore et toujours. A ce point de vue, ni Kant ni qui que ce soit ne peut plus se représenter le vide au delà des sphères : un tel vide serait un non-sens, le monde subjectif étant un produit de la pensée, et la pensée ne pouvant exister sans un objet; il lui faut quelque chose de continu et d'illimité, le plein de Descartes, de Pascal et de tant d'autres géomètres, mais le plein s'étendant à l'infini ! Voilà l'Univers phénomène, l'Univers tel qu'on le rêve. La fantaisie qui ne connaît d'autre loi que celle de l'habitude répète sans fin les associations empiriques qu'elle a vues se produire sous ses yeux; telle la lumière rejetée d'un miroir à un autre, crée des représentations fictives dans des espaces toujours renaissants. Nos regards vont constamment du réel au réel. Comme eux, l'imagination nous promène de vision en vision, de monde en monde, créant l'être au delà de l'être lui-même!

Il est aisé de mettre à nu les exigences subjectives de la pensée sur lesquelles se fonde la première antithèse. Le temps n'a de raison d'être que dans et par les phénomènes successifs d'où on l'extrait. Parler, en l'appelant temps vide, d'un temps qui précéderait les phénomènes, c'est donc permettre à l'imagination de placer l'effet avant la cause, et lorsqu'ensuite le philosophe se demande où trouver dans ces moments inoccupés une raison suffisante pour l'existence, il est clair qu'il songe à tirer le concret de l'abstrait, le monde réel de ce qui n'est plus qu'une forme nue de l'esprit. Etrange préoccupation, assez explicable toutefois dans la donnée d'une philosophie où le sujet impose ses lois à l'objet, la pensée aux

choses. L'Univers, devenu dépendant, se prête à tout et ne manifeste plus aucune exigence. Il attend le *fiat* souverain d'une heure privilégiée entre toutes les autres, d'un moment propice et véritablement créateur ; et c'est parce que dans la chaîne monotone des instants successifs, vaines abstractions de l'esprit, cette heure ni ce moment ne se rencontrent, que les choses sont condamnées à ne pas être !

Même préoccupation en ce qui concerne l'espace. Sans doute, le rapport d'une chose au néant implique, tout rapport exigeant deux termes ; mais de quel droit supposer que le monde entretienne des rapports avec quoi que ce soit? Parler de relations extérieures lorsqu'il s'agit du tout, c'est sortir de l'hypothèse où l'on s'est placé. Ne nous laissons donc pas abuser par la fantaisie; tout ce qu'elle crée au delà de l'Univers est inexplicable, puisque la somme des êtres est déjà faite. Une association habituelle n'est point une loi de la nature, et le besoin de répétition indéfini n'a rien à voir avec la réalité des choses.

Une formule résumera notre pensée. De deux chose l'une : ou le temps et l'espace vide sont des formes de la pensée, ou ce sont des abstractions. Dans le premier cas, on n'a pas le droit de donner une portée objective à des représentations mentales; dans le second, on ne peut soutenir que le temps et l'espace vide existent avant les choses, puisqu'ils n'ont de raison d'être que par les choses mêmes d'où l'entendement les dégage; extraits de la réalité, comment supposer qu'ils la précèdent?

En conséquence, si l'infinité du monde ne repose que sur l'existence de ces formes vides, elle est sans fondement rationnel.

II

La seconde antinomie mathématique offre des traits de ressemblance frappants avec la première : comme la première, elle pose le problème de l'infini, avec cette différence toute-

fois que l'infini qu'elle examine est l'infini de division ou de petitesse; comme elle encore, elle oppose la faculté imaginative à la raison, sous prétexte d'opposer la raison à elle-même; comme elle enfin, elle enveloppe, en les masquant, les deux points de vue du réel et de l'abstrait que nous venons de distinguer.

La thèse de la seconde antinomie est analogue à la thès de la première; elle repose, comme elle, sur des arguments empruntés à la raison pure. Kant la formule ainsi :

« Toute substance composée est la réunion de plusieurs substances simples, et il n'y a dans le monde que des éléments simples et les composés de ces éléments. »

Cette proposition équivaut à la proposition suivante :

« L'infini de division est impossible. »

L'antithèse en est la négation absolue : « Toute quantité peut se diviser à l'infini. » Kant, il est vrai, restreint cette formule, d'une portée générale, pour ne l'appliquer qu'à la quantité matérielle :

« Aucune chose composée ne l'est de parties simples, et dans toute l'étendue du monde il n'existe absolument rien de simple. »

En deux mots, l'infiniment petit est et n'est pas : voilà l'antinomie. La solution peut être esquissée en quelques lignes. — Vous parlez du monde réel : non seulement l'infiniment petit n'est pas, mais il est absolument inintelligible. — Vous parlez de la quantité idéale : l'infiniment petit a un sens, mais un seul, celui d'indéfiniment petit, c'est-à-dire celui qu'on lui donne en mathématiques.

Il va sans dire que, dans l'argumentation de Kant, ces deux points de vue sont soigneusement dissimulés, car ce n'est que d'une confusion que peut résulter le conflit. La thèse [1] se rap-

1. Voici la thèse de la seconde antinomie :

Thèse :

Toute substance composée est la réunion de plusieurs substances simples, et il n'y a dans le monde que des éléments simples et les composés de ces éléments.

Démonstration :

Supposons que les substances composées n'aient pas pour parties d

porte à la matière considérée objectivement, et le critique raisonne comme il doit raisonner, en physicien. Une formule résume toute sa démonstration; pas de composés sans composants ultimes; le nombre des éléments qui entrent comme parties intégrantes dans une collection donnée est donné lui-

éléments simples; alors si l'on supprime par la pensée toute composition, il ne restera aucune partie composée, et, comme dans l'hypothèse il n'y a pas de parties simples, il ne restera non plus aucune partie simple; par conséquent, il ne restera absolument rien, et il n'y a réellement pas de substances. Ainsi donc, ou il est impossible qu'on supprime toute composition par la pensée, ou, si l'on peut la supprimer, il faut nécessairement qu'il reste quelque chose de réel qui ne soit pas composé, c'est-à-dire quelque élément simple. Dans le premier cas, le composé ne serait point formé d'éléments substantiels, car, avec de tels éléments, la composition n'est rien de plus qu'une relation fortuite entre des substances qui, indépendamment de ce rapport, doivent avoir toute leur réalité, comme autant de natures douées d'une existence propre; mais, comme ce cas est en contradiction avec l'hypothèse, il ne reste que le second membre de l'alternative, à savoir que tout composé substantiel en ce monde soit formé d'éléments simples.

De là résulte immédiatement qu'il n'y a d'autres réalités dans le monde que des substances simples; que toute composition est seulement une relation externe entre ces substances, et qu'enfin, bien que nous ne puissions jamais distraire de cet état de composition les éléments substantiels et les isoler entièrement, la raison est cependant obligée de les considérer comme le fond réel de chaque composé, et comme autant de natures simples préexistant au composé.

N. B. — La première partie de l'argumentation laisse, ce semble, à désirer. « Si l'on supprime par la pensée toute composition, il ne restera aucune partie composée..... et, comme il n'y a pas de parties simples..., finalement, il ne restera rien. » L'adversaire demandera de quel droit on supprime par la pensée toute composition, si son hypothèse est celle du nombre infini des parties composées; un tel nombre ne s'épuise pas. Il eût mieux valu, croyons-nous, démontrer que ce nombre est impossible, et rien n'est plus simple. Kant revient d'ailleurs sur ce premier argument pour lui donner une autre forme : « ou bien il est impossible de supprimer toute composition par la pensée..... ou bien..... il faut admettre l'existence d'indivisibles. » Malheureusement, cette forme nouvelle prête encore à la critique; qu'est-ce à dire en effet sinon : « Il restera des éléments simples, et des éléments simples seulement si l'on veut bien m'accorder qu'il soit possible de supprimer en pensée toute composition; traduisez : « si l'on veut bien abandonner l'hypothèse dans laquelle on se place. » Il est clair qu'un adversaire qui aura la moindre conscience de la situation qu'il a prise se refusera à admettre comme légitime la suppression d'une composition qu'il ne déclare infinie que parce qu'il la croit essentielle.

Encore une fois, la pensée de Kant vaut mieux que toutes ces formules qui la trahissent. L'argument caché, mais irréfutable, est celui-ci : Dans le réel, ni un nombre infini ni un nombre indéfini de composants ne sont possibles.

même; il est donc fini et, par suite, il doit exister en dernière analyse des substances simples, indivisibles même à la pensée.

Telle est au fond l'argumentation de Kant, argumentation décisive, bien que l'éminent critique lui prête une forme, à notre avis, embarrassée et suspecte. L'antithèse [1], développée

1. Antithèse :

Aucune chose composée ne l'est de parties simples, et dans toute l'étendue du monde il n'existe absolument rien de simple.

Démonstration :

Supposez qu'une chose composée, en tant que substance, ait pour élément des parties simples. Comme toute relation externe et par conséquent aussi toute composition de substance ne peut avoir lieu que dans l'espace, il s'ensuit qu'autant il y a de parties dans le composé, autant il faut reconnaître de parties dans l'espace que le composé occupe; or l'espace n'est pas formé de parties, mais d'espaces ; donc chaque partie du composé occupe nécessairement un certain espace. Mais les parties véritablement premières du composé sont simples : donc l'élément simple occupe un certain espace. Mais, comme toute existence réelle qui occupe l'espace contient en soi divers éléments placés hors les uns des autres, et par conséquent se trouve composée, formant un composé réel, non d'accidents car les accidents ne peuvent sans substance être hors les uns des autres), mais de substances, il faut nécessairement conclure que l'élément simple est un composé substantiel, ce qui implique contradiction.

La seconde partie de l'antithèse, à savoir qu'il n'existe absolument aucune substance simple dans le monde, ne signifie rien de plus, si ce n'est que l'existence d'une nature parfaitement simple ne peut être démontrée par aucune expérience, par aucune perception interne ou externe, et qu'ainsi la simplicité parfaite de nature ne réside que dans une pure idée dont la réalité objective ne peut être garantie par aucune expérience possible. Une telle idée, par rapport aux phénomènes, est donc sans application et de nul usage. Supposons en effet que l'on puisse trouver un objet correspondant à cette idée transcendantale et soumis à l'expérience; il faudra alors qu'une certaine représentation empirique nous soit donnée, avec ce caractère manifeste de ne point comprendre en elle divers éléments distincts les uns des autres et réunis sous la loi de l'unité; mais, comme de ce fait que nous n'avons point conscience d'une telle variété d'éléments, on ne peut conclure que certainement cette variété n'existe pas dans la représentation de l'objet perçu, et comme d'un autre côté cette conclusion est absolument nécessaire pour nous convaincre de l'existence d'une nature simple, il s'ensuit qu'aucune perception, quelle qu'elle soit, ne peut nous fournir la preuve d'une telle existence. Ainsi donc, puisqu'un objet d'une simplicité absolue ne peut jamais nous être proposé dans une expérience, et puisque le monde sensible doit être considéré uniquement comme le système de toutes les expériences possibles, on est forcé d'admettre que nulle part, dans la nature, un élément simple ne se rencontre et ne nous est proposé.

Le second membre de l'antithèse a beaucoup plus d'étendue que le premier, en vertu duquel l'élément simple est exclu seulement de la représentation sensible d'un composé. En vertu du second, en effet, l'élé-

ensuite, offre un extrême intérêt, parce qu'elle ne s'inspire plus que de l'esprit géométrique et laisse à l'imagination libre carrière. Au point de vue du mathématicien, on le sait, une grandeur peut toujours se diviser en fractions de plus en plus petites, mais qui restent indéfiniment de la même nature que le tout; cette conception que vient corriger, dans la science abstraite, la notion indispensable de limite, est adoptée ici sans tempérament ni réserve. « L'espace, affirme Kant, est nécessairement composé d'espaces. » Voilà l'unique fondement de sa preuve; voilà la clef de voûte de l'argumentation tout entière! De ce principe si contestable, on tire des conséquences qu'il est aisé de prévoir; les éléments ultimes du composé matériel, au cas même où on les supposerait simples, doivent occuper une portion étendue de l'espace, et dès lors leur simplicité hypothétique s'évanouit, car ils deviennent divisibles comme le lieu qu'ils remplissent, c'est-à-dire à l'infini.

Après les distinctions établies dans le cours de ce travail, la critique d'un telle démonstration est facile. Attaquons-nous d'abord au principe sur lequel elle repose; « l'espace est nécessairement composé d'espaces. » S'agit-il, en ce moment, du lieu réel ou de l'étendue intelligible? Supposons, contre toute vraisemblance, qu'ici l'étendue intelligible soit seule en cause : la proposition de Kant pourrait, alors même, être contestée, car on défie de donner un sens quelconque à la notion mathématique de limite, si les fractions ou divisions possibles de la grandeur sont en nombre rigoureusement infini; mais il est trop clair qu'il ne peut être question, dans le cas présent, que du lieu réel, puisqu'on n'envisage la portion d'étendue dont on parle, que comme le réceptacle d'un corps donné; la concevoir comme purement abstraite serait visible-

ment simple est absolument exclu de la nature des choses. C'est ce qui explique pourquoi il était impossible de prouver l'existence d'un tel élément, soit à l'aide du concept d'un objet proposé aux sens externes (et par conséquent composé), soit au nom du rapport d'une nature quelconque à une expérience possible, dans les conditions les plus générales de l'expérience.

ment sortir de l'hypothèse; l'hypothèse, en effet, est que le lieu en question entretient des rapports avec un *quantum matériel défini;* en conséquence, les éléments qui le constituent ne sont et ne peuvent être pour la pensée que la trace des éléments concrets auxquels ils servent de points d'attache; les dernières divisions du lieu réel, du lieu objectif sont donc finalement inétendues et indivisibles, comme les dernières divisions de la matière.

Kant, il est vrai, restreint ensuite la portée de sa proposition, dans un commentaire destiné à la mettre en son vrai jour :

« Cette affirmation qu'il n'existe absolument aucune substance simple dans le monde ne signifie rien de plus, si ce n'est que l'existence d'une nature parfaitement simple ne peut être démontrée par aucune expérience.... et qu'ainsi la simplicité parfaite de nature ne réside que dans une pure idée dont la réalité objective ne peut être garantie par aucune observation possible; une telle idée par rapport aux phénomènes et à leur application est donc sans objet et de nul usage. »

Cette manière de voir nous paraît, à beaucoup d'égards, acceptable; mais il est à craindre que, voulant corriger ce que sa démonstration a d'excessif, le grand critique ne finisse par la détruire de ses propres mains. Kant veut-il dire que l'imagination et l'imagination seule se refuse à admettre l'existence d'indivisibles, pour cette raison très simple qu'elle emprunte ses représentations à l'expérience sensible, et que l'expérience sensible ne peut se passer d'un schème étendu? Nous sommes loin d'y contredire; mais, alors, qu'en se fondant sur des pareilles prémisses on n'essaye pas de conclure que la raison pure affirme et nie à la fois. Dans la seconde antinomie, on n'établit qu'une chose : c'est que l'observation sensible, prolongée par le pouvoir que nous avons tous d'imaginer, contredit certaines conclusions rationnelles logiquement fondées sur le principe de contradiction. A cela quoi d'étrange ou de nouveau? De tout temps on a distingué l'être

du paraître; c'est la plus vieille et la plus solide distinction qu'on puisse mettre à l'actif de la philosophie. Kant l'a adoptée après les maîtres anciens et modernes lorsqu'il a opposé le phénomène, qui se voit et s'imagine, au noumène, qui ne s'imagine ni ne se voit. Si, dans le passage que nous venons de citer, il n'a d'autre but que de confirmer une distinction depuis longtemps établie, ce but est atteint et le philosophe a gain de cause; mais, s'il prétend prouver en même temps, que la faculté qui a pour objet propre l'absolu est ici en opposition avec elle-même, il nous semble loin de compte. Que la raison contredise parfois l'expérience, c'est ce qu'on démontre; on ne démontre pas qu'elle se contredise elle-même. L'argumentation de Kant revient donc en définitive à celle-ci : La raison pure a le tort de voir ses conclusions nécessaires démenties par l'observation sensible, il faut la proscrire, ce qui ne représente pas n'est pas. Nous ne voyons là qu'une antinomie entre deux facultés rivales, et rien de plus.

Ce qui suit, dans l'exposé de l'antithèse, mérite toute notre attention. A supposer qu'une nature simple pût être donnée à l'expérience, il ne s'ensuivrait pas qu'elle fût telle dans la réalité des choses [1]. La raison en est sans doute que le phénomène pourrait ne pas répondre à l'objet tel qu'il est en lui-même. Ainsi on récuse l'expérience au cas où son témoignage viendrait confirmer celui de la raison, sous prétexte que l'apparence nous trompe ou peut nous tromper, et l'on se fait de cette même expérience réputée incertaine et sans portée objec-

1. Voici le passage important auquel nous faisons allusion :
Supposons que l'on puisse trouver un objet correspondant à cette idée transcendantale et soumis à l'expérience; il faut alors qu'une certaine représentation empirique nous soit donnée avec ce caractère manifeste de ne point comprendre en elle divers éléments distincts les uns des autres et réunis seulement sous la loi de l'unité; mais comme, de ce fait que nous n'avons point conscience d'une telle variété d'éléments, on ne peut conclure que certainement cette variété n'existe pas dans l'objet représenté, et comme d'un autre côté cette conclusion est absolument nécessaire pour nous convaincre de l'existence d'une nature simple, il s'ensuit qu'aucune perception, quelle qu'elle soit, ne peut nous fournir la preuve d'une telle existence.

tive, une arme contre la raison qui se permet de la démentir! Il faut cependant opter : ou l'expérience n'a qu'une valeur relative, et alors on serait mal fondé à opposer ses vaines représentations aux idées de la raison pure, sous prétexte de démontrer que les affirmations d'un caractère transcendant se détruisent elles-mêmes, ou au contraire elle nous représente les choses telles qu'elles sont, et il faudrait logiquement en conclure que l'intuition d'une nature simple, si par impossible elle nous était jamais donnée, en impliquerait rigoureusement l'existence.

Admettons toutefois, à titre provisoire, l'hypothèse dans laquelle l'auteur de l'antinomie entend se placer; supposons un moment avec lui qu'aucune perception, quelle qu'elle soit, qu'elle nous mette ou non en face d'une apparence étendue, ne puisse nous assurer de la simplicité absolue de l'élément réel; la seule conclusion légitime qu'il soit permis de tirer de telles prémisses, c'est que dans la nature des choses, indépendamment des formes que l'entendement impose à chaque objet, il peut se faire que nul indivisible n'existe; or cette proposition, purement dubitative, sera loin de suffire à l'antinomie.

En résumé, l'antithèse de la seconde antinomie n'est fondée que sur la difficulté que nous éprouvons à concevoir les éléments ultimes de la grandeur. Kant exagère à plaisir cette difficulté en appelant à son aide la faculté imaginative; celle-ci, à peine entrée en scène, impose à la réalité la loi toute subjective du continu, qui n'a d'application que dans le domaine de la quantité phénoménale, et, un tel principe posé, nous sommes condamnés d'avance, d'espace indéterminé en espace indéterminé, à trouver toujours et sans fin un nouvel espace indéterminé lui-même; tel dividende, tel quotient. D'une grandeur dont le contenu est indéfini, il ne sortira jamais, si on la divise, que des fractions à contenu indéfini; de là cette proposition étrange que l'on nous met finalement en demeure d'accepter : « l'espace est formé d'espaces. » Mais nulle raison ne nous autorise à appliquer au réel la loi de

l'abstrait, au lieu strictement défini par les éléments qui l'occupent, la loi de l'étendue purement intelligible. Raisonner comme on vient de le faire, ce serait dire : « ce qui est indéterminé pour moi est aussi indéterminé en soi ; » ou encore : « la loi des divisions successives de la quantité concrète échappe à mon ignorance ; elle échappe également à la nature, ou tout est irrationnel et fortuit. » Sophismes grossiers, qu'on ne laisse passer que parce qu'on cherche en vain à se représenter l'inétendu ! L'inétendu, encore une fois, ne se représente pas, parce qu'il est l'élément ultime, l'élément absolu de la grandeur.

Que faut-il conclure de cette discussion ?

1° On peut affirmer que, soit dans la thèse, soit dans l'antithèse, Kant a raison, selon le point de vue où il se place.

2° Il est certain que c'est la raison pure qui construit les deux thèses, l'imagination les deux antithèses.

3° Par suite, les deux thèses sont valables dans le concret, les deux antithèses dans l'abstrait.

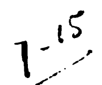
4° S'il en est ainsi, ce n'est pas de la même chose qu'on affirme deux attributs contradictoires, et la raison sort indemne de ce grand débat ; la grandeur qui est en cause porte, à la vérité, le même nom dans la thèse et dans l'antithèse, mais au fond elle est double, ou du moins elle présente deux faces opposées, l'une absolue, l'autre relative, l'une concrète et déterminée en soi, l'autre abstraite et purement intelligible, qui expliquent l'opposition des attributs qui les qualifient.

5° Si la raison s'était surprise, dans cette lutte d'idées, en flagrant délit d'opposition avec elle-même, c'eût été au nom et en vertu du principe de contradiction, qui conséquemment eût échappé aux antinomies.

6° C'est ce même principe de contradiction qui les résout.

Si donc nous n'avons pour douter de l'accord de la raison avec elle-même que les deux antinomies que Kant a déclarées insolubles, notre doute manque de fondement ; c'est un doute gratuit et sans portée.

QUATRIÈME PARTIE



L'INFINI EN PHILOSOPHIE

CHAPITRE PREMIER

L'INFINI ET LES CONCEPTS DE L'ENTENDEMENT

L'infini revêt en psychologie deux formes distinctes :
1° Le général.
Le concept n'enveloppe pas à proprement parler l'infini. Il est indéfini, en ce sens qu'il peut être appliqué à un nombre indéfini ou indéterminé d'êtres ou d'individus de la même espèce.
2° Le parfait ou l'absolu.
Comment expliquer l'indéfini en psychologie. — La matière de l'indéfini est l'abstrait ; sa forme est le principe d'intelligibilité ou plus exactement la définition même de l'intelligence.
L'indéfini en psychologie comme en mathématiques ne répond qu'à une loi subjective de la pensée, libre de se répéter elle-même sans obstacle ni terme quelconque dans l'abstrait.
Locke et Leibnitz. Part de vérité qu'enferment le rationalisme et le sensualisme en ce qui concerne la genèse des concepts généraux.
Les formes *a priori* expliquées comme les concepts généraux par la loi d'intelligibilité.

Un des problèmes les plus complexes et les plus obscurs que de Platon à Kant se soient transmis les psychologues, est assurément celui de l'origine de la connaissance ; deux notions ont surtout exercé leur sagacité, parce que rien n'est moins aisé que d'expliquer leur présence au sein d'une intelligence finie ; ce sont celles du général et du parfait, autrement dit de l'infini *extensif* et de l'infini *intensif*. L'analyse de l'idée de perfection nous entraînerait au delà des bornes de cette étude ; dans le

cadre que nous nous sommes tracé, la genèse de nos concepts généraux offre seule un intérêt spécial.

Qu'il existe dans la raison humaine des concepts généraux, c'est un fait; il y a plus : si nous pensons souvent au particulier, nous ne pensons jamais, à proprement parler, que le général. Qu'est-ce donc que le général, ce facteur indispensable de l'idée?

Prenons un exemple : soit l'idée abstraite de l'homme. — Entend-on dire que cette idée réponde à un nombre infini d'individus d'essence identique, et qu'elle les enveloppe tous? Non seulement une telle idée n'existe pas, nous en appelons à l'expérience de chacun, mais elle enferme une contradiction qui lui ferme à jamais l'accès de l'entendement; concevoir un nombre infini, c'est ce qui implique formellement, et nous ne nous imaginons posséder une telle notion que par suite d'une de ces illusions communes que la raison dissipe sans peine. — Dirons-nous donc que le concept général d'homme enferme un nombre immense, mais fini d'individus? Une telle hypothèse est si visiblement contraire aux faits, qu'elle ne saurait être prise au sérieux; jamais des individus, en nombre fini, si considérable qu'il soit, n'épuiseront le contenu du concept qui les enveloppe, et, pour cette raison même, les déborde. — Il ne reste dès lors qu'une supposition à faire : il faut que l'idée générale réponde à un nombre indéterminé d'êtres ou d'objets; il faut que les termes *général* et *indéfini* soient synonymes.

C'est ce qu'on peut établir directement. Un concept général est toujours un concept dont l'objet est purement idéal ou abstrait; or l'abstrait est de telle nature que l'esprit n'y trouve jamais d'obstacle, jamais de raison suffisante de s'arrêter. Lorsque, par élimination successive des traits individuels, l'essence a été peu à peu mise à nu et isolée, nul lien ne la tenant plus attachée à la réalité concrète, elle devient, en quelque sorte, partie intégrante de l'entendement qui la recueille et lui impose sa loi; le concept possède alors une extension égale, supérieure même à toute addition mentale-

ment effectuée, et il est nécessaire qu'il en soit ainsi; le nombre des individus représentés doit croître en effet avec l'exercice du pouvoir intellectuel qui les représente; il doit même dépasser, de l'indéfini, les accroissements successifs que chacun de nous réalise en sa pensée, puisque le pouvoir d'en réaliser de nouveaux dépasse toujours, de l'indéfini, l'usage que nous en faisons dans tel ou tel cas déterminé et spécial.

C'est ce phénomène étrange d'une infinité idéale toujours plus prompte à grandir que la pensée à l'atteindre, qui suscita aux diverses époques de l'histoire les hypothèses souvent admirables mais hasardeuses d'un rationalisme intempérant. On ne pouvait expliquer ni par l'expérience ni par le calcul la présence dans l'entendement de ces notions d'une généralité inépuisable, de ces types dont l'extension embrasse toujours plus d'individus que ceux que leur attribuent nos conceptions même les plus hautes. Il était dès lors naturel de supposer dans la pensée humaine quelque chose de surhumain, d'admettre au sein de l'entendement fini quelque chose d'infini. De là tant de brillantes mais fragiles constructions métaphysiques, comme celles de la *Réminiscence* ou de la *Vision en Dieu*. Il fallait, ou bien se résoudre à croire que l'infini dont il nous semble avoir conscience est sans raison suffisante, ce qui est impossible; ou bien attribuer l'existence de ce concept à un être infini lui-même, dont la réalité substantielle était dès lors rigoureusement établie. Pour Platon, comme pour Malebranche, l'idée générale est quelque chose de divin; c'est un souvenir ou une lumière d'en haut, car il est impossible de s'élever par ses propres forces du particulier à l'universel, ou ce qui revient au même du fini à l'infini. L'infini doit donc, chronologiquement pour l'un, logiquement pour l'autre, préexister au fini dans la raison de l'homme. Telle est au fond la pensée de Descartes et le principe de la *Théorie des idées innées*, théorie que Locke ne pouvait logiquement rejeter qu'en ramenant la question à ses véritables termes, c'est-à-dire en montrant que l'infini prétendu n'est que l'indéfini, la quantité réputée achevée et

parfaite, qu'une quantité en voie de perpétuelle génération. Avec Kant, le problème prend un autre aspect; les idées innées deviennent des formes subjectives de l'esprit, et néanmoins ces formes demeurent, en grande partie, sinon toutes, marquées du caractère de l'infinité. Le Temps et l'Espace, dans l'*Esthétique transcendantale*, ne sont ouverts à tous les phénomènes successifs ou simultanés qui s'y déposent, que parce qu'ils dépassent de l'infini leur multiplicité possible; ce sont des cadres que la série illimitée des représentations ne parviendra jamais à remplir et où une impression quelconque venue du dehors trouvera toujours sa place; et, dans la pensée de Kant, le temps et l'espace ne sont pas seulement infinis, mais universels et nécessaires; le philosophe ne leur refuse aucun des attributs de ces idées dont on est depuis longtemps convenu de composer le domaine de la raison. Telles apparaissent aussi les catégories de l'entendement, celle de quantité, qui enferme le progrès à l'infini du nombre; celles de substance et de cause, unités formelles et subjectives qui servent, soit de support, soit d'explication, à une multitude infinie de faits. Les catégories ressemblent à des tiroirs où se trouve presque toujours, apparent ou caché, l'infini. Quant aux idées de la raison pure, ces formes suprêmes où viennent enfin se condenser et se réduire les plus hautes généralités que l'entendement conçoive, elles représentent, au dernier stade du progrès intellectuel, des infinis d'ordre supérieur, les plus vastes et les plus compréhensifs de tous. Le *moi* enveloppe l'infinité des phénomènes psychiques aperçus au sein de l'infinité du temps et ramenés antérieurement à des lois générales, c'est-à-dire d'une extension infinie. Le *monde* enveloppe l'infinité des phénomènes cosmiques dispersés dans l'infini de l'espace, et subordonnée à des concepts d'une portée également infinie. *Dieu* enfin est ou doit être l'infini par excellence, parce que c'est le récipient ultime et sans limites, le gouffre où s'abîment, pour ne plus reparaître que sous la forme de l'unité, toutes ces infinités différentes.

On le voit, quelle que soit la variété des systèmes, l'idée de l'infini a toujours passé pour la première et la plus importante de ces notions qu'on croyait devoir admettre *a priori* dans l'entendement humain ; la plupart des philosophes idéalistes ont été plus loin et ont fait de ce concept un concept unique d'où dérivent comme de leur source tous les autres ; et rien ne s'explique mieux. Plaçons-nous pour un moment dans l'hypothèse rationaliste ; admettons qu'il nous soit possible de nous faire une idée positive de l'infini véritable ; il est clair que tout appel fait à l'expérience en vue d'expliquer une pareille notion sera inutile ; il est également clair que, cette notion une fois posée *a priori*, on aura sous la main tout ce qu'il faut pour expliquer les notions marquées du caractère de la généralité et de la perfection ; or il semble que la raison n'ait rien à expliquer au delà ; car l'expérience paraît suffire à tout le reste ; on conçoit donc qu'on ait été amené à créer la raison pour l'infini, qui, de temps immémorial, y représente ou tend à y représenter seul tout l'*a priori* de la science humaine.

Mais encore une fois, au lieu de rechercher si l'infini prétendu est ou n'est pas *a priori*, il eût mieux valu se demander si réellement il existe. Que le général paraisse l'impliquer, nul doute : il semble qu'une grandeur inépuisable doive être infinie. A première vue, comment se refuser à croire que des idées comme celles de l'homme, de l'animal, de l'arbre, n'impliquent pas une multitude infinie d'hommes, d'arbres, d'animaux réels ou possibles ? C'est pourtant là une erreur et des plus graves par leurs conséquences ; la seule vérité qu'on y démêle et qui résiste à la critique, c'est que l'un quelconque des concepts dont on parle est supérieur par son extension à toute addition idéalement effectuée d'individus. S'il a jamais existé une forme du sensualisme assez étroite pour nier ou simplement pour contester cette proposition fondamentale, elle est au-dessous de la discussion ; une collection d'êtres réels répétée en imagination autant de fois qu'on le voudra n'égalera jamais le contenu de l'idée qui les enferme, et une

analyse de ce contenu qui ne verrait rien au delà serait si manifestement incomplète qu'elle ne tromperait personne. Toute somme est faite de parties que l'addition a épuisées; or le contenu d'une idée générale est inépuisable; sur ce terrain, le rationalisme peut défier toutes les attaques. Ce n'est là, il est vrai, qu'un des côtés de la question, et un sensualisme avisé peut prendre acte de cette déclaration même pour la retourner aussitôt contre l'adversaire. « C'est justement, dira-t-il, parce que le contenu de l'idée est inépuisable qu'il ne saurait passer pour infini; ce qui est infini est achevé, ce qui est inépuisable ne l'est jamais. »

Il est donc également vrai que l'expérience pure est impuissante à rendre compte du général, et la raison à concevoir le prétendu infini qu'il enveloppe; un idéalisme excessif ne nous semble pas moins éloigné de la vérité, dans la solution du problème qui nous occupe, que le sensualisme le plus grossier; bref, soutenir que l'extension d'un concept est finie, c'est dénaturer les faits, prétendre qu'elle est infinie, c'est rendre le concept lui-même inintelligible.

On l'a montré, la vérité sur ce point fut entrevue par l'empirisme du XVIIe siècle. Sous l'influence des remarquables analyses de l'école anglaise, Leibniz comprit qu'il devait réduire à leur minimum les prétentions du rationalisme cartésien et proposa la formule célèbre : « tout vient des sens, excepté l'intellect. » Mais que pouvait signifier au juste cet amendement restrictif? Que la matière de la connaissance doit être élaborée par l'esprit? Rien ne semble moins plausible, car, sur ce terrain, rationalisme et sensualisme étaient et sont encore aujourd'hui plus près qu'on ne le croit de s'entendre. Locke ne reconnaissait-il pas explicitement l'existence d'idées composées, analogues aux idées factices de Descartes, et le travail de coordination qui leur donne naissance pouvait-il être attribué à une autre cause qu'à l'intellect? Avant Locke Bacon avait donné à l'intelligence un rôle plus actif encore, lorsqu'il la comparait à un miroir qui modifie les objets. Dans tout système réaliste, il faut bien accorder à l'esprit en même

temps que l'existence un pouvoir spécial qui le caractérise, et le problème de l'origine de nos connaissances ne peut même être posé d'une façon intelligible que si l'on admet, d'une part, un objet susceptible d'être connu, de l'autre un sujet actif apte à le connaître. Quel est donc au fond le sens de la formule de Leibniz? Quelle est la fonction propre de cette puissance qu'il nomme intellect? — En présence du phénomène particulier, c'est elle sans doute qui nous met en possession du général? — Soit : Le géneral existe donc en puissance dans l'entendement. — Mais comment définir le général? S'il implique l'infini, il faut reconnaître que la pensée enferme *a priori* une contradiction, ce qui est monstrueux, et, s'il n'est qu'une forme de l'indéfini, on cherche en vain en quoi l'analyse nouvelle peut bien différer de celle de Locke; elle est moins précise et moins explicite, voilà tout.

Au vrai, Leibniz ne nous semble pas avoir suffisamment mis en lumière ce qu'on pourrait appeler la fonction propre de l'intellect. Dire qu'il enferme le général comme le caillou l'étincelle, ou comme le bloc de marbre la statue qu'y ont déjà dessinée ses veines, c'est sans doute appeler l'attention sur ce fait incontestable qu'avant toute observation l'idée n'est en nous que virtualité pure, ce n'est pas dire assez nettement qu'elle se refuse à envelopper l'infini. Il est certain que Leibnitz excluait l'infini de la quantité abstraite; de conséquence en conséquence, n'en serait-il pas venu jusqu'à l'exclure du concept? C'est ce dont nous pourrons juger par le passage suivant[1] :

« PHILALÈTHE. Une notion des plus importantes est celle du fini et de l'infini, qui sont regardés comme des modes de la quantité.

« THÉOPHILE. A proprement parler, il est vrai qu'il y a une infinité de choses, c'est-à-dire qu'il y en a toujours plus qu'on n'en peut assigner; mais il n'y a point de nombre infini, ni de ligne ou toute autre quantité infinie, si on les prend pour des touts véritables, comme il est aisé de le

1. *Nouv. ess. sur l'Ent. hum.*, chap. XVII.

ɔmontrer. Les écoles ont voulu dire celà en admettant un ıfini syncatégorimatique. Le vrai infini à la rigueur n'est que lans l'absolu qui est antérieur à toute composition et n'est point formé par l'addition des parties.

. . . .

. . . .

« PHILALÈTHE. Nous avons cru que la puissance qu'a l'esprit d'étendre sans fin son idée de l'espace par de nouvelles additions étant toujours la même, c'est de là qu'il tire l'idée d'un espace infini.

« THÉOPHILE. Il est bon d'ajouter que c'est parce qu'on voit que la même raison subsiste toujours. Prenons une ligne droite et prolongeons-la, en sorte qu'elle soit double de la première. Il est clair que la seconde, étant parfaitement semblable à la première, peut être doublée ; de même pour avoir la troisième, qui est encore semblable aux précédentes ; et, la même raison ayant toujours lieu, il n'est jamais possible qu'on soit arrêté. Ainsi la ligne peut être prolongée à l'infini, de sorte que la considération de l'infini vient de celle de la similitude ou de la même raison, et son origine est la même avec cell des vérités universelles et nécessaires. Cela fait voir commen ce qui donne de l'accomplissement à la conception de cet idée se trouve en nous-mêmes et ne saurait venir des exp riences des sens, tout comme les vérités nécessaires ne s raient être prouvées ni par l'induction ni par les sens. L'i de l'absolu est en nous intérieurement comme celle de l'e Ces absolus ne sont autre chose que les attributs de Die l'on peut dire qu'ils ne sont pas moins la source des idées Dieu est en lui-même le principe des êtres. L'idée de l'a par rapport à l'espace n'est autre que celle de l'imm de Dieu, et ainsi des autres. Mais on se trompe, en v imaginer un espace absolu qui soit un tout infini comp parties ; il n'y a rien de tel. C'est une notion qui ir contradiction, et ces touts infinis et leurs opposés in petits ne sont de mise que dans le calcul des géomèt comme les racines imaginaires de l'algèbre. »

Encore une fois, la pensée intime de Leibniz ne peut faire en ce qui concerne la quantité, l'objet d'un doute ; composée de parties distinctes les unes des autres, la grandeur ne saurait au sens rigoureux du terme être appelée infinie, car le nombre infini implique; pourtant elle est inépuisable. Dans l'abstrait, il est toujours possible d'ajouter le nombre au nombre sans jamais rencontrer la borne, qui ferait de la quantité croissante un tout achevé, un système clos; et l'explication en est aisée : « c'est, dit l'auteur des *Nouveaux essais*, que la même raison d'ajouter subsiste toujours. » Vue profonde et qu'il eût suffi d'étendre, pour obtenir la solution du problème dans son ensemble ! Au fond, pour Leibniz comme pour Locke, l'idée de l'indéfini est loin d'être une notion toute faite, une notion inscrite dans l'âme comme l'édit sur l'album du préteur ; c'est un concept lentement élaboré, au sein duquel il est aisé de démêler deux éléments distincts : d'une part, la quantité abstraite qui en est comme la matière et qui déjà présuppose un exercice assez long, bien que souvent inconscient, de la faculté discursive ; de l'autre, le sentiment plus ou moins confus du pouvoir que nous avons, dans l'abstrait, d'ajouter toujours le même au même, sentiment qui résulte, à n'en pas douter, de cette considération que l'abstrait privé de tout ressort se prête à toute combinaison et ne relève plus que de l'esprit.

Voilà ce qu'a fort bien vu Leibniz en traitant de la grandeur mathématique, et il semble légitime d'en conclure qu'il eût sans répugnance étendu à la notion, la théorie qu'il croyait vraie de la quantité ou du nombre; la logique de sa doctrine l'eût sans doute conduit peu à peu à l'analyse que l'on propose, analyse qui fait de tout concept, quel qu'il soit, une forme de l'indéfini et une conséquence du principe de similitude.

Nous devons toutefois faire une réserve. Où l'auteur des *Nouveaux essais* nous paraît manquer au *principe d'économie*, c'est lorsqu'il fait de la considération de la similitude ou de la même raison une de ces vérités nécessaires qui trouvent leur suprême explication en Dieu lui-même. Si nous com-

prenons bien la pensée du philosophe, la loi qui, dans l'abstrait, nous emporte sans fin de progrès en progrès, n'est pas seulement une exigence subjective de l'esprit, c'est un principe éternel et absolu, qui, à ce double titre, relève d'une raison supérieure à la nôtre et réside dès l'origine, au sein d'une pensée éternelle et absolue comme lui. En un sens, rien ne nous semble moins contestable. Il est certain que les lois de l'esprit aussi bien que celles de la matière doivent avoir leur dernière et définitive raison dans la cause transcendante de la matière et de l'esprit; mais c'est là un problème de métaphysique pure, qui vient ici mal à propos compliquer le problème psychologique que nous avons à résoudre, et il est permis d'ajouter que, si l'on n'a pour placer en Dieu la loi dont il s'agit, d'autres raisons que les caractères de nécessité et d'universalité qu'on lui attribue, le plus sage est de renoncer à cette prétention; une telle nécessité, en effet, n'est qu'hypothétique et l'universalité dont on parle n'est que relative à certaines données; hors de l'abstrait, elle n'aurait pas de sens. Pourquoi donc chercher si haut et si loin une explication qui se trouve à notre portée, puisque nous la rencontrons en nous-mêmes, dans la définition ou, pour mieux dire, dans la constitution essentielle de l'entendement humain?

On peut établir *à priori* et comme un principe supérieur à la discussion, que toute intelligence, dès qu'elle est posée comme telle, est posée avec le désir fondamental qui la constitue; or par définition ce désir n'est et ne peut être autre que celui de réduire à ses lois propres les matériaux qu'elle cherche à s'assimiler, en d'autres termes, de rendre tout objet de pensée intelligible. Il en est de l'intelligence comme de tout autre pouvoir, son besoin essentiel est de s'exercer; mais comment s'exercerait-elle si elle n'imprimait sur la matière de la connaissance la marque de sa nature propre? De là une double tendance aujourd'hui constatée par tous ceux qui, ayant souci des choses de l'esprit, ont soumis à une analyse rigoureuse les vérités qu'on est convenu, dans l'école,

d'appeler premières; l'une consiste à demander à tout événement sa raison d'être, à tout phénomène sa cause; l'autre oblige la pensée à ne jamais se contredire ou, ce qui revient au même, à ne jamais affirmer et nier à la fois la même chose sous le même rapport. Ces deux lois peuvent se ramener l'une à l'autre, parce que toutes deux sont l'expression d'une même nécessité inhérente à l'entendement. Poursuivre l'intelligible, n'est-ce pas en même temps rejeter ce qui est contradictoire? Et une intelligence qui se contredirait sans scrupule ne ferait-elle pas fi des conditions mêmes de l'intelligibilité, en résistant à sa loi essentielle?

S'il en est ainsi, on concevra sans peine que l'entendement produise de lui-même, et tire de son propre fonds, la notion à première vue si mystérieuse de l'indéfini, dès que l'abstrait lui est donné comme matière. Serait-il donc intelligible qu'il traitât un pur concept comme une chose réelle, que, par suite, il le supposât rebelle aux additions mentales dont il est toujours susceptible? Serait-il intelligible qu'au delà des additions par lui effectuées il ne conçût pas la possibilité d'additions nouvelles, le pouvoir d'ajouter le même au même subsistant toujours, et le sentiment de ce pouvoir ne devant jamais manquer à une intelligence qui par définition se connaît?

On s'explique alors non seulement l'apparition de cet indéfini tout subjectif dans le champ de la pensée, mais encore l'illusion d'optique qui fait que nous projetons au dehors cette virtualité intérieure comme une sorte de cadre apte à recevoir toute quantité abstraite ou tout concept; nous avons ainsi comme le mirage de l'*a priori*. On a dit de la psychologie critique que c'est une psychologie d'adulte, et rien n'est plus vrai; occupé à énumérer les formes typiques dans lesquelles viennent se mouler toutes nos pensées, Kant oublie trop l'ouvrier intérieur qui pour créer chacune d'elles n'a eu besoin que d'une matière préexistante et de son art propre. En un sens, toutefois, le criticisme a raison. Que les catégories qu'il nous propose soient ou non primitives et, au

sens rigoureux du terme, innées, il n'en est pas moins nécessaire de les attribuer au sujet pensant, qui à tout le moins les a fait siennes en leur imposant sa loi essentielle. Une seule réserve est importante : les catégories, devrait-on dire, ne naissent pas en nous et avec nous, elles naissent de nous, par le progrès spontané de la raison. Cette concession obtenue, pourquoi ne pas reconnaître, avec l'illustre critique, que tout ce qui passe l'expérience relève de l'entendement lui-même et participe de sa nature? Il nous suffit que l'entendement soit, non une faculté oisive et distribuée dès l'origine en compartiments d'une symétrie mathématique, mais un pouvoir actif, industrieux, occupé dès les premiers jours de l'existence, aux clartés obscures d'une conscience à peine éveillée, à créer, selon les groupes de faits qui se présentent, des cadres où la main d'un ouvrier unique se reconnaît à l'unité même du procédé.

CHAPITRE II

LE PRINCIPE COMMUN DE L'IDÉE DE L'INFINI ET DE TOUTES LES OPÉRATIONS INTELLECTUELLES

La déduction et l'induction ramenées, comme toutes les opérations primitives de l'intelligence, à la loi de l'indéfini et au principe fondamental d'intelligibilité.
Hiérarchie des opérations primitives. — Sensation. — Perception. — Association. — Raison. — Déduction. — Ses deux formes. — Induction. — Ses deux facteurs.

Des analyses qui précèdent se dégagent les conclusions suivantes :

1° Aucune notion générale n'enveloppe l'infini ; ce concept se ramène au concept de l'indéfini, qu'on peut regarder comme le complément naturel et comme la forme de toute notion purement abstraite.

2° Le concept de l'indéfini se résout à son tour dans la loi d'intelligibilité, et la loi d'intelligibilité dans la définition de l'intelligence, seule innée à elle-même, ainsi que l'avait pressenti Leibniz.

En mettant à nu cette exigence essentielle et primordiale de l'entendement, nous avons rencontré le maître ressort, le premier ou plutôt l'unique moteur de la vie intellectuelle tout entière ; c'est ce qu'il sera aisé d'établir dans le présent chapitre. Il ne nous semble nullement superflu de faire voir que l'idée de l'indéfini entretient des relations de parenté étroite avec toutes les autres, que les mêmes éléments la constituent, qu'enfin le principe qui l'explique explique en même temps

toutes les fonctions primitives ou dérivées de l'intelligence : opérations psychologiques et logiques, résultent en effet, au même titre que la notion qui nous occupe, de cette aspiration primitive vers l'intelligible qui est l'acte par excellence de l'esprit, parce qu'il exprime son essence même.

I

Opérations psychologiques.

Pour prouver que toute opération psychologique a sa raison d'être dans une loi innée de l'entendement, il faut distinguer avec soin l'acte mental de sa condition extérieure et adventice ; il faut définir avec précision le sujet et l'objet, le dedans et le dehors. Qu'est-ce donc à proprement parler que le dehors ? — L'objet sensible ? — Mais l'objet sensible n'existe comme tel que parce qu'il est perçu, et il n'est perçu que par l'intermédiaire du « principe d'intelligibilité » où se retrouve la marque de l'esprit. — La sensation ? — On ne saurait le soutenir avec quelque vraisemblance : considérée en elle-même et en dehors des raisons extérieures qui la conditionnent, la sensation est toute subjective; ne porte-t-elle pas d'ailleurs le sceau de l'unité psychique qui la produit? Faute d'une analyse suffisante, l'empirisme s'est toujours mépris sur ce qui constitue la matière de la connaissance; la donnée extérieure se réduit, selon toutes les probabilités, au mouvement, c'est-à-dire, à de simples changements de rapports dans l'espace. Ainsi aucune notion ne serait *adventice;* et en effet, si l'on accorde, comme il est indispensable de le faire, un rôle essentiel à l'esprit dans la production de la pensée, comment admettre qu'une connaissance quelconque, que dis-je, qu'une sensation si vague et si obscure qu'on l'imagine, lui arrive jamais toute faite? Le supposer serait refaire aujourd'hui, après un sensualisme superficiel, le rêve enfantin et ridicule des alouettes toutes rôties; le dehors ne peut nous fournir que la condition de la pensée, et il n'est pas, à proprement parler, de connaissance *à posteriori.*

Quel est donc le rôle de l'intelligence dans les diverses opérations que le psychologue soumet à son analyse ? Il suffit, pour le définir, de s'observer soi-même. L'intelligence se connaît et connaît ses modifications variées ; telle est sa première et nécessaire fonction. De là les notions d' « *être* », de « *substance* », de « *cause* », de « *fin* » complétées par celles de « *manières d'être* », de « *modes* », d' « *effets* » et de « *moyens* » qui en dépendent. Une fonction non moins importante est celle qui s'exerce lorsque, après s'être reconnu lui-même par l'intuition immédiate du sens intime, l'esprit prend possession des objets extérieurs ; obligé de concevoir la réalité sur le type de sa nature, il impose alors à tout ce qui l'entoure la forme idéale de l'*intelligible*. De là deux actes nécessaires, l'un qui a pour objet de *réduire progressivement à l'unité la multiplicité sensible*, l'autre qui poursuit en tous sens *les raisons explicatives et les causes*. Ce n'est que lorsqu'ils sont réduits à l'unité et ramenés à leurs principes que les événements extérieurs peuvent nous être assimilés ; alors, mais alors seulement, ils entrent de plein droit dans l'intelligence humaine.

En définitive, ce n'est pas seulement le *général de la connaissance rationnelle*, c'est encore le *particulier de la connaissance sensible* qui résulte de ce besoin d'intelligibilité où nous avons trouvé la source même et le vrai principe de l'indéfini ; une rapide esquisse des principaux phénomènes qui constituent la vie psychique le montrera en détail.

1° La *sensation* est déjà une synthèse inaperçue mais réelle de faits multiples ; au dehors, des vibrations et par suite des éléments plus ou moins nombreux qui se déplacent [1] ; au dedans, l'unité absolue, puisque la sensation, de l'aveu de tous, est en elle-même absolument indivisible.

2° La *perception* n'existe visiblement que par la double opération dont nous venons de parler : — réduction à l'unité, d'une part ; recherche des raisons, de l'autre. — En effet, la

1. Nous n'entendons parler ici que du phénomène nerveux qui conditionne immédiatement la sensation.

perception est d'abord une synthèse de sensations diverses, qui lui sont données comme *matière*, ce qu'a très bien vu l'empirisme de tous les temps; c'est ensuite et surtout l'acte de l'esprit qui fixe ses propres sensations sur leurs causes présumées et nous permet ainsi d'affirmer l'existence de la réalité extérieure.

On remarquera que cette double opération explique encore les deux idées principales que la perception nous procure : celle d'étendue et celle d'impénétrabilité. L'étendue, en effet, est une notion étroitement liée à la synthèse de certaines sensations spéciales dans l'unité de temps [1]; quant à l'idée d'impénétrabilité, elle n'entre dans l'entendement qu'au moment où nous concevons hors de nous des forces rivales de la nôtre, c'est-à-dire au moment où nous attribuons à des raisons distinctes de nous-même les impressions de résistance que nous fait éprouver la matière : nier l'impénétrabilité, c'est nier qu'il existe en dehors de nous des énergies capables de réagir; si l'atome résiste, le lieu ou le point de l'espace qu'il occupe ne saurait être occupé, en même temps que lui, par un atome autre que lui.

3° L'*association*. — On pourrait désigner ainsi l'acte par lequel nous groupons d'après certaines lois, pensées ou images. Cette fonction répondrait donc à la fois à l'imagination et à la mémoire, qui s'exercent d'ailleurs simultanément dans la réalité de la vie psychologique. Ainsi définie l'association serait la *forme* de la perception, comme la perception est la *forme* de la sensation, car l'association lie entre elles des perceptions distinctes, comme la perception des sensations isolées; c'est donc une synthèse, et de plus on observera que nos perceptions ne s'associent sous le regard de l'intelligence que suivant des *raisons objectives ou subjectives*, c'est-à-dire suivant des *raisons* tirées soit des choses elles-mêmes, soit de l'intelligence qui les a perçues.

4° La *raison* qui abstrait et généralise répondrait à une

1. Voir les premiers chapitres et spécialement le chapitre IV.

synthèse supérieure, à une synthèse du quatrième degré. L'élément abstrait que la raison a pour objet d'isoler est une unité idéale commune à plusieurs objets déjà perçus et comparés entre eux, et, ainsi que nous l'avons longuement expliqué, c'est encore la *loi d'intelligibilité* qui nous permet d'attribuer à tout abstrait une manière d'être caractéristique, celle de l'*indéfini*, et de le concevoir dès lors comme général.

Toutes ces opérations sont rangées dans un ordre tel que celle qui précède est toujours la condition ou le moyen de celle qui suit : les notions les plus hautes, celles que l'on nomme *universelles et absolues*, se ramènent de degré en degré à des abstractions, les abstractions à des perceptions comparées, les perceptions à des sensations liées entre elles, les sensations enfin à ces mouvements issus du dehors et qui seuls seraient, pour nous servir des termes de l'école, *à posteriori*.

En sorte qu'avec la donnée extérieure, et l'intelligence définie par sa loi essentielle, nous avons tout ce qu'il faut pour construire et expliquer les opérations progressives qui se nomment :

1° Sensation,
2° Perception,
3° Association,
4° Raison,

et qui résument toute la vie psychologique.

II

Opérations logiques.

Les deux instruments de la pensée discursive sont la déduction et l'induction ; celle-ci, destinée à conduire l'esprit de la conséquence au principe; celle-là, à le ramener du principe à la conséquence. Il nous reste à montrer que l'un et l'autre procédé s'expliquent, comme l'indéfini lui-même, par la nature de l'entendement qui les emploie.

§ I. Extraire par voie d'analyse une idée partielle de l'idée totale qui l'enveloppe, telle est l'essence de la méthode déductive et le fond de cette logique abstraite qui se propose moins de découvrir que de prouver; or, on le sait, le mécanisme tout entier des arguments qui doivent servir à la preuve repose sur l'axiome d'identité, et cet axiome n'est pour l'entendement une loi nécessaire et inviolable que parce que rien n'est moins intelligible que l'acte d'affirmer et de nier en même temps et sous le même rapport. C'est donc le *principe d'intelligibilité* qui fonde le *principe d'identité*, à moins qu'on ne soutienne, ce qui est également vraisemblable, que dans la réalité de la vie intellectuelle ces deux vérités n'en font qu'une.

Il est aisé de rendre cette démonstration sensible à l'aide d'un double schème, valable, l'un dans la science quantitative, l'autre dans la science qualitative. S'il s'agit de la quantité, en effet, le procédé déductif est généralement fondé sur des rapports d'égalité, et, s'il s'agit de la qualité, sur des rapports d'inclusion; au fond, comme on va le voir, le mécanisme de l'argumentation reste le même.

Voici le type du syllogisme employé par les sciences abstraites qui ont pour objet spécial l'analyse de la quantité :

$$A = B,$$
$$B = C,$$

donc :

$$A = C.$$

Il est clair que, si $B = C$, on a le droit de substituer C à B dans la première équation, qui devient $A = C$, et, si l'on affirme avant la conclusion l'égalité de A et de C, comment concevoir qu'en posant la conclusion on la nie? Nulle circonstance nouvelle né s'est produite; tout est resté dans l'état; la contradiction est donc flagrante, flagrante aussi la négation de la loi d'intelligibilité.

De là ce premier théorème présenté souvent à titre d'axiome, parce que l'opération mentale qui lui donne naissance n'est

qu'à demi consciente : *deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles*. Une telle conclusion devient le principe ou plutôt l'instrument de théorèmes nouveaux, qui deviennent à leur tour les conditions ou moyens de démonstrations plus compliquées. La géométrie n'est donc, ainsi que l'avait vu Descartes, qu'une longue chaîne de déductions sur les anneaux de laquelle on ne saurait repasser, sans trouver à l'origine les axiomes, et au delà, le principe d'intelligibilité, qui, en les expliquant, leur donne une portée universelle.

La théorie reste la même si l'on passe de la mathématique à la logique ou de la quantité à la qualité; dans ce nouvel ordre d'idées, on s'appuie sur un théorème analogue dont voici l'énoncé :

« Le contenu du contenu est contenu dans le contenant. »

En d'autres termes :

A est enveloppé dans B,
B dans C,

donc :

A dans C.

Il est également aisé d'en donner la démonstration, en faisant appel à la loi primordiale de l'entendement; si l'on niait la conclusion, en effet, on affirmerait à la fois que B est et n'est pas intégralement contenu dans le terme C, puisque la proposition finale déclarerait, contrairement à la seconde, qu'une partie du contenu de B doit être extérieure au terme C. — L'homme, d'une part, est un être animé; on l'accorde; — on reconnaît, d'autre part, que tout être animé est mortel; — il n'est plus permis de nier que l'homme soit mortel, sans se démentir soi-même.

Quelques-uns des plus illustres représentants de l'école anglaise contemporaine, fidèles à la tradition expérimentale qui est l'honneur et le péril de leur philosophie, en sont venus à reléguer au second plan la méthode déductive, et à ne plus voir dans le syllogisme qu'un complément plus ou moins utile de l'induction, qui, depuis Bacon, est devenue

l'instrument par excellence de toute recherche et de toute conquête scientifique. Ils s'accordent donc à lui dénier ou du moins à lui contester ce caractère d'absolue rigueur dont les savantes analyses d'Aristote semblaient l'avoir définitivement investie ; Spencer en fait une simple méthode d'approximation ; Mill n'entend accorder à la proposition générale qui lui sert de majeure qu'une valeur relative, celle des inductions qui l'ont introduite dans l'entendement : c'est une mention portée au « garde-notes », une « étiquette » mise sur des faits, une « formule » destinée à soulager la mémoire plutôt qu'à manifester les lois essentielles et nécessaires de la raison. Le syllogisme manque donc de base, et la dialectique des idées, forcée de compter avec l'expérience après l'avoir si longtemps asservie, vient lui demander sa sanction ; telle est du moins la doctrine qui tend à s'accréditer de plus en plus parmi les partisans de l'observation, en Angleterre et ailleurs. Elle est loin, selon nous, d'être pleinement justifiée. En premier lieu, les axiomes et les principes régulateurs de la pensée lui échappent. Il est, à l'origine de la science comme de la métaphysique, des jugements d'une nécessité absolue dont l'expérience peut bien fournir la matière, mais qui ne doivent leur forme qu'à la raison même à laquelle ils empruntent toute sa rigueur ; ces jugements sont tels, *à priori*, qu'on ne saurait en restreindre l'extension ou en contester la généralité sans faire violence à la pensée, qui se trouverait condamnée à affirmer et à nier en même temps et sous le même rapport un même attribut d'un même sujet [1]. En second lieu, les formules qui enveloppent et résument les faits, et que vise presque uniquement la théorie de Mill, sont plus rigides que ne le suppose l'empirisme, et l'on aurait tort de croire qu'elles sont à la merci du premier événement que susciterait le hasard. Un individu privé d'un ou de plusieurs caractères essentiels à son espèce serait un monstre exclu d'avance de la vie et par suite des catégories naturelles que

1. Tels les principes rationnels et les axiomes.

l'entendement y trace, et, d'autre part, il est impossible de supposer qu'il manque à une variété tout entière quelques-uns des attributs généraux qui servent à définir le type commun : un animal qui, sauf l'appareil mammaire, ressemblerait à un poisson, ne serait pas un poisson; comment admettre qu'une variété de lions rumine ou qu'une variété de bœufs soit carnivore, si l'on est convenu à l'avance de ne ranger parmi les bœufs que les animaux qui ruminent et parmi les lions que ceux qui se nourrissent de chair? Supposer qu'on puisse rencontrer dans un ordre ou dans une classe, grâce au hasard d'expériences nouvelles, des caractères opposés à ceux qui font l'essence même et l'unique raison d'être de cet ordre ou de cette classe, c'est encore et toujours se contredire; c'est dans une autre sphère, celle du contingent, *affirmer et nier en même temps et sous le même rapport.*

On dira sans doute qu'il n'est nullement prouvé que les attributs spécifiques d'un même groupe d'êtres soient les mêmes à tous les moments de la durée et que le passé, si long qu'on le suppose, ne saurait répondre de l'avenir; si les hommes sont nécessairement mortels, il est hors de doute que tel homme, le duc de Wellington je suppose, est condamné à mourir; mais est-il établi que la mortalité soit tellement liée à la somme des traits essentiels et constitutifs de l'homme, qu'elle ne puisse d'aucune façon et à aucune époque en être séparée? en d'autres termes, la liaison dont on parle est-elle oui ou non indissoluble? Il suffirait, au point de vue de l'exactitude formelle du syllogisme, de répondre qu'un homme qui ne meurt pas n'est plus un homme, et que, par suite, il faut, dans une semblable hypothèse, nier la mineure [1]. Il est vrai qu'au point de vue de la réalité des choses le problème subsistera tout entier; car, qu'on soit ou non convenu d'appeler hommes des êtres sujets à mourir, il

1. Voici l'argument en forme :
Maj. : Tous les hommes sont mortels (prop. établie *à priori*).
Min. : Or le duc de Wellington est un homme.
Il est évident que de l'hypothèse il faut nier cette mineure, le duc de Wellington manquant d'un des attributs essentiels à l'humanité.

restera toujours à savoir si la mort est ou n'est pas séparable d'un certain groupe d'attributs qui constitue, pour tout le reste, l'humanité ; mais alors la question change de face ; nous sommes sur le terrain de l'induction, dont il s'agit de déterminer le principe pour en contrôler la valeur et la portée. Essayons d'établir que ce nouveau procédé n'a, comme les opérations précédentes, comme le concept de l'indéfini lui-même, d'autre fondement que ce besoin impérieux de la pensée que nous avons retrouvé partout, parce qu'à lui seul il l'exprime et la résume tout entière.

§ II. On ne saurait nier que le point de départ, sinon le principe véritable de l'induction soit dans une aspiration nécessaire de l'entendement. L'homme désire naturellement savoir, mais la science est au prix de l'unité, et l'unité n'est possible dans la variété indéfinie des phénomènes qu'à l'aide de formules générales appelées lois. Que le désir de pénétrer le secret des choses en le cherchant dans ces formules soit constant et universel, rien n'est moins douteux ; l'histoire des idées et des doctrines scientifiques en fait foi. A l'origine, le besoin ou, si l'on ose dire, le sens de la généralisation est développé outre mesure ; on n'a point encore de méthode fixe pour dégager le nécessaire du fortuit, le phénomène fondamental de ses circonstances accessoires ; presque toujours, on suppose plutôt qu'on ne trouve, on pressent plutôt qu'on ne voit, on bâtit en l'air, faute d'une base expérimentale suffisante, mais enfin on cherche à bâtir, tant il est vrai que l'instinct de la construction scientifique est inné à l'homme, comme celui des travaux matériels à l'abeille et au castor ! A quoi bon repasser sur les origines de la philosophie et de la science et rappeler ces hypothèses hardies auxquelles il n'a manqué pour devenir des lois certaines que la sanction alors impossible des faits ? Ce qui mérite d'appeler toute notre attention, c'est qu'il se produit dans l'histoire de chaque individu un phénomène analogue ; l'enfant induit avec plus de spontanéité que l'homme fait ; sa puissance d'association est telle qu'il s'attend, d'ordinaire, à voir

liés dans l'avenir les phénomènes que le hasard des circonstances a réunis une fois déjà sous ses yeux; pour lui, les nuances n'existent pas; les détails lui échappent par leur ténuité même, mais les grandes lignes appellent ses regards, et, dans la variété des objets qui l'environnent, il démêle sans trop de peine les traits communs. A cet âge, on l'a souvent remarqué, tous les hommes sont des « papas », toutes les femmes des « mamans », tous les jeunes garçons, toutes les petites amies, des homonymes obligés du frère ou de la sœur. Nous nous trouvons donc en présence d'une loi certaine : « Le minimum de l'expérience, soit dans l'individu, soit dans l'espèce, correspond toujours au maximum du développement de l'instinct généralisateur. » A mesure que les faits se multiplient et entrent plus pressés dans la conscience, le besoin de généraliser diminue ; l'observation exacte l'endigue et le contient, comme les canaux, l'eau qui déborde. Quelle conclusion devons-nous tirer de ces prémisses, sinon qu'il faut chercher dans une loi innée à l'entendement le point de départ et comme le ressort de l'induction ? Nul ne songerait à noter les consécutions constantes au sein de la variété indéfinie des faits, s'il n'était persuadé à l'avance que les faits doivent se suivre dans un ordre régulier. Au seuil même de la science apparaît donc ce désir de l'intelligible sans lequel la science ne serait pas; l'intelligence postule qu'en dehors d'elle tout soit réglé sur l'idée de l'ordre qui la constitue; avant de chercher à s'assimiler les choses, elle demande que les choses soient « assimilables », c'est-à-dire d'une nature semblable à la sienne propre ; de là ces lignes trop souvent artificielles, qui, tracées à la hâte au sein des phénomènes qu'elles déforment, trahissent, à l'origine, le besoin le plus impérieux de la pensée, celui de se retrouver partout elle-même.

C'est donc à une tendance subjective et innée qu'il faut attribuer l'origine de l'induction. Sur ce point, l'étude analytique des faits est en complet désaccord avec la doctrine de l'expérience. On sait comment Mill et après lui Spencer ont cherché à expliquer, à l'aide d'observations accumulées, le

pouvoir d'anticiper l'avenir, qui est le privilège de l'homme [1]; il est permis de regarder leurs théories comme les deux étapes ou moments d'une seule et unique démonstration, le premier faisant surtout appel à l'expérience de l'individu, le second à l'expérience de la race. On peut répondre à l'un et à l'autre que si l'expérience, soit individuelle, soit héréditaire, est le facteur véritable de la généralisation, cette faculté doit être en raison directe des observations personnellement ou héréditairement faites; or c'est précisément le contraire qui arrive; en nous infligeant de perpétuels démentis, les faits nous rendent chaque jour plus circonspects; à mesure qu'ils se produisent et sont étudiés de plus près, les cadres spéciaux apparaissent, les lignes de démarcation se dessinent plus nombreuses, le particulier enfin envahit le général; et ce qui est vrai de l'homme individuel ne l'est pas moins de l'humanité tout entière, d'autant plus défiante d'elle-même qu'elle sait davantage, d'autant moins portée à étendre l'observation qu'elle a appris à mieux observer.

D'autre part, à la vérité, il faut bien reconnaître que l'induction n'est pas tout entière dans le besoin intellectuel de généraliser, qui la précède plutôt qu'il ne l'explique. Soutenir le contraire, c'est se condamner d'avance à déclarer que toute association même accidentelle et subjective serait valable, ce qui est absurde. Si le ressort de toute induction est une anticipation naturelle de la pensée qui recherche et poursuit dans toutes les directions l'intelligible, ce ressort, dans chaque cas particulier, vient se heurter à la donnée expérimentale qui en limite le jeu et en contient le déploiement spontané. Dans toute catégorie déterminée de faits, l'intelligible prend une forme spéciale ajustée au cadre précis qu'il rencontre et qui le limite; autant de groupes distincts de phénomènes, autant de moules où le pouvoir de généraliser reçoit une empreinte particulière, autant de canaux où il se ramifie pour féconder la connaissance brute.

1. Nous ne parlons ici que de la forme réfléchie de ce pouvoir, l'instinct de l'anticipation se rencontrant aussi chez l'animal.

C'est ce que ne parviendra jamais à expliquer l'idéalisme subjectif, aussi impuissant en face de la réaction du dehors que l'empirisme en face de l'impulsion spontanée du dedans. L'un et l'autre phénomène, cependant, veulent être expliqués. Admettons pour un moment avec l'idéalisme que la nature ne puisse être pour nous que la trame même de nos sensations; il faut de deux choses l'une : ou que ces sensations répondent terme pour terme à des phénomènes objectifs, soustraits à toute prise intellectuelle, ou que seules elles existent dans le monde. Admet-on comme vraisemblable la première hypothèse, on admet implicitement qu'il existe, en dehors de nos sensations, des raisons objectives qui les font telles ou telles, et, en présence de cette réaction constatée du monde extérieur, l'idéalisme pur trahit son principe et succombe. Croit-on, au contraire, que nos sensations soient le tout des choses, on ne peut plus leur trouver de raison d'être ni de point d'appui que dans l'entendement. Comment alors expliquer qu'elles soient réfractaires à la loi même de l'entendement qui, toujours en quête des généralités les plus hautes, se voit toujours gêné et contenu par les faits? Par quel étrange caprice la pensée humaine se retournerait-elle contre elle-même? Pourquoi faut-il qu'elle comprime son essor, qu'elle violente à plaisir sa propre nature? Quoi qu'on fasse, quoi qu'on imagine, l'antagonisme ici est flagrant. On n'oserait soutenir avec Fichte, qui a poussé à bout l'idéalisme de Kant, que le moi, à son insu, se limite, qu'il impose lui-même des bornes à son expansion spontanée ; il serait trop aisé de répondre que de semblables limitations sont purement accidentelles, qu'aucune règle *a priori* ne les explique, et qu'après tout, s'il est possible qu'un être s'ignore partiellement, il est tout à fait inconcevable qu'il emploie à se détruire une partie de sa propre activité, ce qui arriverait nécessairement dans l'hypothèse où l'on se place. Il suffit d'une analyse, même superficielle, pour s'apercevoir que, lorsque l'entendement est aux prises avec les faits, « l'idée, » refoulée d'abord et contenue, n'envahit plus ensuite que la surface que la réalité lui

offre. Où trouver au sein d'une seule et même faculté la raison de ces mouvements en sens contraire? Il est certain que ni l'idéalisme pur ni l'empirisme n'expliquent complètement un procédé où se rencontre la trace de deux termes distincts, le monde extérieur et le moi.

La vérité est qu'en toute circonstance l'expérience et la raison sont opposées l'une à l'autre, comme l'objet et le sujet. Mais, qu'on le sache ou non, il doit entrer et il entre en effet toujours quelque chose de subjectif dans l'expérience; et, d'autre part, la raison ne peut s'exercer que sur quelque chose d'objectif. De tout temps, l'humanité a compris que le fait et l'idée sont deux facteurs essentiels de la science; mais chacun, dans le vaste travail des siècles, s'est placé à son point de vue et a obéi à ses préférences propres; les uns se sont surtout attachés aux faits, en vue de fournir une base aux constructions souvent trop fragiles de la raison pure; les autres n'ont voulu voir dans le phénomène sensible que l'enveloppe de l'idée qu'ils ont essayé d'en faire jaillir. Le besoin d'unité est inné à toute intelligence, mais il faut commencer par faire « d'un plusieurs » en interrogeant la réalité; il est toujours temps ensuite de faire de « plusieurs un » en cédant à ce besoin d'intelligibilité qui a ouvert la voie et aplani les premiers obstacles. Poursuivre d'une aspiration vague et générale l'unité intelligible, la plier ensuite aux divisions qu'imposent les faits, et l'introduire dans chacun des compartiments que dessine l'expérience : voilà, si notre analyse ne nous trompe pas, toute l'histoire de l'induction.

Reste à savoir quelle est la valeur du principe essentiel de la raison lorsque, appliqué aux phénomènes particuliers, il les transforme en lois générales? Que se passe-t-il lorsque j'induis? Dans le domaine circonscrit des faits que j'observe, j'aperçois certaines consécutions régulières; ces consécutions sont-elles nécessaires ou accidentelles? Voilà le problème capital. J'ai vu, je suppose, le phénomène B succéder dix fois, vingt fois au phénomène A dans des circonstances différentes; il est déjà vraisemblable, sinon certain,

qu'aucune des circonstances en question n'influe directement sur le résultat; car elles changent à chaque expérience, et le résultat reste le même; or il serait absolument inintelligible que des raisons variables produisissent un phénomène identique, l'effet devant traduire au dehors toutes les modifications de la cause dont il n'est que l'exacte et rigoureuse expression[1]. Lorsque, à la suite d'expérimentations savamment conduites, l'élimination du fortuit est complète, il ne reste plus à l'entendement qu'une hypothèse possible; l'antécédent A est lié objectivement au conséquent B. C'est ce qu'il est aisé de comprendre : d'une part, en effet, toute chose et en particulier tout phénomène doit avoir sa raison d'être; c'est la formule même du principe d'intelligibilité; de l'autre, toute raison différente de A a été écartée par l'enquête minutieuse que l'expérimentation a ouverte dans les séries concourantes de phénomènes, et qu'elle a, on le suppose, menée à bien : il faut donc de toute nécessité que le terme B dépende du terme A comme de sa raison immédiate. Je dis immédiate, car, dans le monde invisible des « noumènes », aucune enquête n'est ni ne sera jamais possible : on peut donc, sans contradiction, supposer que le terme A représente la condition ou la somme des conditions *phénoménales* sous lesquelles une cause correspondante, mais cachée, se déterminerait à agir. Quoi qu'il en soit, au point de vue expérimental, une seule chose nous intéresse, la liaison nécessaire de deux termes; et cette liaison est rigoureusement établie. Il est donc permis d'anticiper l'avenir et de savoir enfin de cette science utile qui prévoit.

Prenons un exemple : on demande si la température d'ébullition de l'eau sera la même, la pression et les autres circonstances phénoménales demeurant invariables à un moment

1. L'affirmation que « plusieurs effets différents peuvent dériver d'une même cause » semble inexacte. La cause dont on parle agit alors avec le concours de certaines circonstances qui ont leur part d'action dans le résultat total et qui peuvent varier; d'ailleurs il existe un autre élément de variation dans les objets auxquels les causes s'appliquent et qui réagissent différemment.

quelconque de la durée et en un point quelconque de l'espace. La réponse ne saurait être un moment douteuse. Si, dans les mêmes circonstances, l'eau n'entrait pas en ébullition, l'eau ne serait plus l'eau, puisqu'on est convenu d'appeler de ce nom un corps qui, sous certaines conditions, bout à la température de 100 degrés centigrades. Et qu'on ne dise pas que c'est là une dispute de mots! Dans l'espèce, le principe d'intelligibilité exige que la cause invisible que nous nommons l'eau ait changé de nature et soit devenue autre qu'elle-même pour expliquer le résultat nouveau. En veut-on la preuve? L'antécédent phénoménal qui répond aux circonstances définies de température et de pression n'a pas varié : c'est l'hypothèse. — Puisque néanmoins le conséquent varie, il faut qu'en dehors de l'antécédent phénoménal une variation quelconque se soit produite. — Où la chercher? — Dans des circonstances fortuites? — L'hypothèse les élimine pour ne laisser subsister que des différences de temps et de lieu sans influence par elles-mêmes, puisque le temps et le lieu sont choses inertes; reste que le changement se soit produit dans l'invisible noumène, c'est-à-dire dans la cause, ou, pour parler plus exactement, que la cause telle que nous la connaissons ait disparu pour céder la place à une autre cause, munie de toutes les aptitudes de la première, excepté une.

Le principe d'intelligibilité garantit donc le retour régulier des phénomènes sous la réserve que les causes persistent. Mais qui garantira maintenant la persistance des causes? — Leur existence même; ce qui est en dehors des séries phénoménales, échappe à la durée et par suite au changement; le noumène, par définition, n'est-il pas éternel? — Ainsi donc, de deux choses l'une : ou l'on admet l'existence réelle de certaines causes latentes sous les faits, et, dans une telle hypothèse, la persistance de ces causes ne peut faire doute ; ou on les rejette comme de vaines et vides entités, et dès lors, les raisons des événements n'ayant plus de place que dans l'ordre des phénomènes, il serait contradictoire dans les termes, partant, inintelligible que, toute circonstance acciden-

telle écartée, l'antécédent A produisît jamais autre chose que son conséquent ordinaire.

Il est vrai que les circonstances peuvent changer et modifier, dans la mesure même de ces changements, le cours régulier des événements naturels; on ne saurait nier qu'une même cause, soumise à de nouvelles influences, doive produire des effets nouveaux, ou, si l'on tient à écarter le noumène de la science, qu'à un nouvel antécédent doive répondre un nouveau conséquent; mais il répugne à l'esprit d'admettre qu'un antécédent nouveau soit posé au hasard, et, bien qu'ici la loi d'intelligibilité ne manifeste plus d'aussi inflexibles exigences, il semble à tout le moins fort probable que, toutes les fois qu'un système nouveau de phénomènes fait son apparition dans le temps, ce système a sa raison d'être dans quelque conception d'ensemble qui nous échappe; c'est, sans nul doute, l'effet, inintelligible pour nous, intelligible en soi, d'un ordre prédéterminé et éternel.

Toute construction scientifique repose donc, en dernière analyse, sur le principe constitutif de l'intelligence humaine et même d'une intelligence quelle qu'elle soit. On peut, à la rigueur, contester la portée objective de ce principe, et l'idéalisme de tous les temps ne s'en est pas fait faute; mais, dans ce cas, l'on ne nous mettrait au défi de résoudre le problème de l'induction que parce qu'on se serait mis soi-même dans l'impossibilité de le poser. On ne viendrait pas nous demander sans doute s'il est ou s'il n'est pas rationnel d'affirmer la constance et la régularité des lois du monde, car le monde ne peut avoir aucune réalité distincte de nous-mêmes, au cas où le principe d'intelligibilité serait purement subjectif. On n'oserait nous demander non plus si l'ordre des événements, abstraction faite de toute cause, est ou n'est pas invariable, car, encore une fois, ou bien ces événements sont quelque chose en dehors de nos sensations, ou ils ne sont que nos sensations elles-mêmes; on ne saurait, sans se dédire, admettre la première hypothèse; la seconde nous conduit à cette

question étrange : Nos sensations se développent-elles en séries régulières ? Si ces sensations ne dépendent que de l'entendement, pourquoi l'entendement n'en ferait-il pas varier le cours à son gré, et dès lors que deviendrait la science [1] ?

Résumons-nous. Le problème de l'induction ne se pose intelligiblement que si le principe d'intelligibilité a une portée objective, et, si le principe d'intelligibilité a une portée objective, il suffit à résoudre le problème qu'il a posé.

La loi essentielle de l'intelligence qui nous a permis, en psychologie, d'expliquer la genèse presque inconsciente de nos connaissances, suffit donc aussi, en logique, à rendre compte des procédés que la science emploie avec une pleine conscience de ses démarches, savoir l'induction et la déduction.

Nous croyons avoir établi cette proposition d'une importance capitale, que le principe qui explique l'indéfini porte en germe et explique en même temps toutes nos opérations et toutes nos idées ; le concept que nous nous proposions d'analyser dans ce travail n'est donc en définitive qu'un rameau détaché du tronc commun, et au même titre que tous les autres, l'effet nécessaire d'une loi unique.

1. On peut supposer que la régularité de certaines séries dépend de lois inconnues de nous et innées à l'esprit ; mais alors, encore une fois, le problème de l'induction ne peut plus se poser, la nature et la pensée se ramenant à un seul et même principe.

CHAPITRE III

LES ARGUMENTS THÉOLOGIQUES ET L'IDÉE DE L'INFINI

Avons-nous l'idée de l'infini ? — Cette idée impliquant contradiction, nous ne pouvons concevoir Dieu sous la forme de l'infini. — Critique des preuves de Descartes, de Newton, de Clarke.

Argument ontologique. — La critique de Kant. — L'ancienne métaphysique paraît avoir raison contre Kant lorsqu'elle affirme que la perfection enveloppe l'existence, mais on peut contester le postulat qu'admettent à la fois Kant et l'ancienne métaphysique, savoir la présence dans la pensée du concept de l'infini ou du parfait.

Valeur des raisons morales en ce qui concerne l'existence de Dieu.

Si le concept de l'infini exclu de la conscience comme contradictoire doit céder la place à une notion toute subjective qui trouve son origine et son explication définitive dans le progrès nécessaire de l'entendement, on comprendra qu'il soit impossible d'accorder une valeur absolue aux arguments qu'on désigne en théologie sous le nom de métaphysiques, et qui n'ont, semble-t-il, d'autre raison d'être qu'une illusion de la pensée.

On a maintes fois soutenu que le concept de l'Infini est de tous le plus réel et le plus positif, parce que l'être, disait-on, est plus positif que le néant. — Il est aisé de répondre que dans le domaine de la quantité l'être n'est vraiment positif que lorsqu'il est circonscrit ; exclure toute borne en pareil cas, c'est précisément exclure tout être, car un être qui implique contradiction dans son essence n'est et ne sera ja-

mais, fût-il décoré du nom pompeux d'infini, qu'un pur néant.

Que dire de ces principes éternels, de ces notions marquées au coin de l'infinité, que quelques écoles ont pris plaisir à multiplier dans l'entendement humain pour en faire autant de pensées de Dieu lui-même? Nous pouvons nier d'abord qu'une multiplicité quelconque pénètre dans la suprême Raison; en second lieu, lorsqu'on affirme que certains principes sont éternels et nécessaires, on ne veut dire qu'une chose : c'est que, certains sujets une fois posés, il est impossible à une intelligence modelée sur la nôtre, à quelque moment de la durée qu'elle se transporte, de nier certains attributs qui font partie intégrante de leur essence. Le temps peut-il influer sur la solution d'un problème où il n'entre pas comme donnée? Traduisons donc : dans l'indéfini du temps, une raison quelconque, pourvu qu'elle soit assujettie à la loi de ne pas se contredire, ne pourra affirmer telle chose qu'à la condition d'affirmer telle autre chose. Nous ne voyons pas, pour notre part, quel argument sérieux et convaincant on peut tirer de cette nécessité toute subjective en faveur de l'existence de Dieu. Qu'y a-t-il, que peut-il y avoir de commun entre le temps qui s'écoule et l'entendement divin? Nous sommes dupes d'une illusion; nous confondons avec la pensée parfaite notre fragile raison, que nous projetons d'époque en époque, de siècle en siècle, dans l'indéfini du devenir.

Si les notions de temps et d'espace ne possèdent qu'une infinité relative et hypothétique, on ne sera pas tenté non plus d'en faire, après Newton et Clarke, des attributs inhérents à la nature même de Dieu; attribuer à Dieu comme modes, le temps et l'espace infinis, ce n'est pas seulement le nier en lui imposant les conditions d'existence et les catégories d'une nature bornée, c'est faire entrer, en même temps que l'infini quantitatif, la contradiction dans son essence.

Le terrain paraît plus solide lorsqu'on passe de la quantité à la qualité, de l'infini proprement dit à la perfection. — « Dis, mon âme, comment entends-tu le néant, sinon par

l'être ? Comment entends-tu la privation, sinon par la forme dont elle prive ? Comment l'imperfection, si ce n'est par la perfection dont elle déchoit ? Mon âme, n'entends-tu pas que tu as une raison, mais imparfaite, puisqu'elle ignore, qu'elle doute, qu'elle erre, qu'elle se trompe ? Mais comment entends-tu l'erreur, si ce n'est comme la privation de la vérité, et comment le doute ou l'obscurité, si ce n'est comme privation de l'intelligence et de la lumière ? Comment l'ignorance, si ce n'est comme privation du savoir parfait, et, dans la volonté, le déréglement et le vice, si ce n'est comme privation de la règle, de la droiture et de la vertu ? Il y a donc primitivement une intelligence, une science certaine, une vérité, une fermeté, une inflexibilité dans le bien, une règle, un ordre, avant qu'il y ait une déchéance de toutes ces choses ; en un mot, il y a une perfection avant qu'il y ait un défaut. Avant tout déréglement, il faut qu'il y ait une chose qui soit à elle-même sa règle et qui, ne pouvant se quitter soi-même, ne peut pas non plus ni faillir ni défaillir. Voilà donc un être parfait. Mais l'homme ignorant croit connaître le changement avant l'immutabilité, parce qu'il exprime le changement par un terme positif et l'immutabilité par la négation du changement même, et il ne veut pas songer qu'être immuable c'est être, et que changer c'est n'être pas. Or l'être est, et il est connu avant la privation qui est non-être. Avant donc qu'il y ait des choses qui ne sont pas toujours les mêmes, il y en a une qui, toujours la même, ne souffre point de déclin, et celle-là non seulement est, mais elle est toujours connue, quoique non toujours démêlée ou distinguée faute d'attention. »

Il faut faire deux parts dans cet admirable plaidoyer. Lorsque Bossuet affirme que, dans l'ordre de l'être, la richesse doit précéder la pauvreté, l'immutabilité, le changement, l'absolu, le relatif, sa thèse à notre sens défie la critique. Il est vrai qu'elle repose, ainsi que toutes les propositions certaines de la métaphysique, sur l'emploi de cette méthode négative qui use de l'exclusion plutôt que de l'intuition di-

recte ; mais qu'importe ? L'entendement ne saurait, sans froisser le principe essentiel de contradiction, affirmer que le premier des êtres n'ait pas en lui la source et par suite la plénitude de l'être. Ne faisons donc nulle difficulté d'admettre que l'absolu soit avant le relatif, la réalité pleine et achevée avant la limite. Est-ce à dire pour cela que dans l'ordre subjectif de la connaissance nous concevions le parfait avant l'imparfait ? Le problème est tout autre, et il faudrait, avant de l'aborder, avoir répondu à une question préalable, celle de savoir si l'idée du parfait est ou non vraiment présente à l'esprit. Une telle recherche, étrangère au domaine strictement défini de la quantité, nous est interdite ; ce qu'il est permis d'affirmer, c'est que le sort de l'argument est étroitement lié à la réalité du concept de l'absolu. Descartes a-t-il trop présumé de l'intelligence humaine en croyant y reconnaître la trace même et comme l'impression de la divinité ? On peut avoir sur ce point l'opinion que l'on voudra, mais si l'on accorde au philosophe l'existence positive de la notion qu'il postule, son argumentation devient inattaquable. Comment en effet dans le relatif expliquer la présence de l'absolu, si ce n'est par la toute-puissante intervention de l'absolu lui-même ? La production d'une telle idée par l'entendement humain, entendement borné et imparfait, serait un miracle.

On se rendra un compte plus exact de cette vérité, en soumettant à l'analyse l'argument fameux que Kant regardait, et à bon droit, comme la citadelle de l'ancienne métaphysique. On connaît la preuve à laquelle Anselme de Kanterbury attacha son nom et qu'adoptèrent après lui, non sans quelques amendements, Descartes Malebranche et Leibniz. Persuadés de l'existence d'un concept positif de l'absolu, ces philosophes ne crurent pas pouvoir refuser leur assentiment au syllogisme connu du *Proslogium*, et, quoi qu'on en ait pu dire, il faut bien, dès qu'on accepte leur point de départ, leur donner raison. Si la perfection véritable est conçue, il est nécessaire qu'elle existe. Si la raison de l'homme a l'intuition

du parfait, le parfait dont elle a l'intuition n'a sans doute rien d'abstrait ni de factice, car, supérieur par définition à toute opération de l'entendement, il ne peut être extrait de quoi que ce soit qui ne soit pas lui; il est donc inévitable qu'il possède une réalité indépendante de nous-mêmes et des créations plus ou moins artificielles de la fantaisie. Dans l'attaque qu'il a dirigée avec tant de vigueur contre la preuve ontologique, Kant raisonne à peu près ainsi : « L'idée de la perfection existe, » il ne le conteste pas sérieusement. « Une telle idée implique l'existence de la perfection, » voilà ce qu'il nie. — Mais, la première proposition acceptée, comment rejeter la seconde [1] ? Le type idéal que l'entendement conçoit, type

1. La critique de la preuve ontologique est d'une telle importance dans l'œuvre de Kant, que nous croyons devoir citer ici les textes les plus importants qui s'y rapportent. (*Critiq. rais. pure*, DIALECTIQ. TRANSCEND., sect. IV, par. 712, trad. Tissot.)

L'auteur vise d'abord la forme spéciale que Descartes a donnée à l'argument :

« Si dans un jugement identique je fais disparaître le prédicat et que je retienne le sujet, il en résulte une contradiction ; je dis alors que le prédicat convient nécessairement au sujet; mais, si je fais disparaître le sujet en même temps que le prédicat, alors il n'y a pas de contradiction, car il n'y a plus rien avec quoi il puisse y avoir contradiction. Il est contradictoire de supposer un triangle, si l'on en supprime par la pensée les trois angles ; mais il n'y a pas de contradiction à faire disparaître le triangle en même temps que ses trois angles. »

Appliquons ce principe à l'argument qu'on nous propose :

La perfection existe, dit Descartes, parce qu'il faut affirmer d'une chose tout ce qui est contenu dans son idée, or l'idée d'existence est enfermée dans l'idée de perfection, il faut donc affirmer la perfection de l'existence; rien de plus catégorique, à ce qu'il semble, ni de plus certain. Certitude illusoire, objecte Kant. Si vous posez la perfection, vous ne pouvez plus nier l'existence, mais pourquoi poser la perfection?

On répondra : nous avons le droit de poser la perfection comme sujet, dans un jugement quelconque, si nous la concevons distinctement; vous ne pouvez nous interdire de soumettre cette notion aux formules de la logique que si elle implique contradiction pour l'esprit et n'existe que de nom dans la pensée.

Rien n'est donc plus correct que la proposition :

« La perfection (dont j'ai l'idée) existe. »

Soit; mais, insiste l'illustre critique, en supprimant l'existence, je supprimerai la chose même avec tous ses attributs. Où serait alors la contradiction ?

« Dieu est tout-puissant : c'est là un jugement nécessaire. La toute-puissance ne peut être enlevée si vous posez une divinité, c'est-à-dire un être infini, au concept duquel elle soit identique; mais si vous dites : « Dieu n'est pas », alors il n'y a ni toute-puissance ni aucun autre attribut; car

supérieur à toute élaboration mentale, ne peut avoir de réalité qu'en soi et par soi; la vision nette du parfait n'est possible que si le parfait existe en dehors de l'esprit impuissant

ils sont tous ensemble enlevés au sujet, et il n'y a pas ombre de contradiction dans cette pensée. »

Faut-il le dire? à notre avis cette argumentation repose tout entière sur un malentendu. Vous supprimez le prédicat « existence » et vous croyez supprimer du même coup l'objet d'une idée ! C'est impossible ; cet objet subsiste pour l'entendement, qu'il soit réel ou purement imaginaire. Vous pouvez tant que vous le voudrez nier l'existence de la perfection, vous ne retrancherez pas pour cela du champ de la vision intellectuelle le type idéal que j'aperçois, si véritablement je l'aperçois ; c'est comme si vous disiez au voyageur qui, dans le désert, se trouve en face de quelque apparence lointaine, mais qui craint d'être dupe d'un mirage : « Vous pouvez affirmer d'emblée que l'objet de votre vision n'existe pas, car alors tout aura disparu, existence et objet à la fois ! » Étrange proposition ! Ce qui ne saurait disparaître au coup de baguette du logicien, c'est l'apparence elle-même ; or cette apparence peut justement envelopper la réalité qu'on se croit autorisé à supprimer *à priori*. — Retrancher le prédicat existence, c'est retrancher le sujet, dites-vous. — Mais la question est précisément de savoir si je puis opérer la suppression d'un tel prédicat, car j'ai sous les yeux un type de perfection qui a tout autant de chance d'être réel qu'idéal. Rendons notre pensée sensible à l'aide d'un symbole. — J'aperçois de loin, aux lueurs incertaines du crépuscule, une forme vague ; voulez-vous que j'en nie la réalité, sous l'étrange prétexte que cette réalité une fois niée, sujet et prédicat auront disparu à la fois? Mais je n'ai nul droit de rejeter *à priori* la réalité de cette forme, attendu que l'apparence que je saisis, si mal définie qu'on la suppose, enveloppe la possibilité d'un être réel, et que je ne puis nier *à priori* ce qui *à priori* est possible.

Kant présume sans doute que cette réponse ou une réponse analogue peut lui être faite, car il ajoute :

« Il ne vous reste d'autre subterfuge que celui de soutenir qu'il y a des sujets qui ne peuvent pas être supprimés, qui par conséquent doivent rester. »

C'est bien ce que soutiennent en effet tous les métaphysiciens qui ont accordé une valeur probante à l'argument, depuis Anselme de Kanterbury jusqu'à Leibniz. La perfection est un concept, ou pour parler plus exactement, l'objet d'un concept qu'on ne saurait exclure arbitrairement de l'esprit, et avec lequel, bon gré mal gré, il faut compter, lorsqu'on se propose de faire disparaître le prédicat « existence ».

« Autant vaudrait dire alors qu'il y a des sujets absolument nécessaires. »

C'est ici qu'apparaît le « malentendu » entre Kant et l'ancienne métaphysique ; celle-ci ne postule qu'une chose : l'existence de la perfection, non comme réalité substantielle, ce qui serait une franche pétition de principe, mais comme objet imaginaire ou réel d'une idée ou d'un concept. Précisons l'hypothèse qui sert de point de départ aux spéculations de Descartes et de Leibniz. — Il se peut que la perfection que nous concevons ne soit qu'une apparence toute subjective, comme le serait pour nos yeux celle d'un fantôme ; il se peut également qu'elle ait une

à en créer l'idée. Il semble donc que l'ancienne métaphysique ait absolument raison contre Kant, lorsque, dans la perfection qu'elle croit concevoir, elle constate la réalité

existence en soi, une existence objective et extérieure à la pensée; mais là pour le moment n'est pas la question. Ce qu'il importe de noter, ce qu'on affirme avant toute chose, à titre de postulat, c'est qu'il existe pour la pensée un type de perfection qu'on n'en saurait exclure arbitrairement, et qui en ce sens du moins est nécessaire. On peut accepter ou rejeter une telle opinion, il nous semble en tout cas qu'elle se laisse aisément saisir. Comment donc expliquer que Kant ait donné à la pensée de ses adversaires un sens qu'aucun d'eux n'eût voulu admettre? On n'oserait croire que l'argumentation du grand critique s'embarrasse dans une telle équivoque, si nous ne citions textuellement :

« Dire qu'il existe des sujets absolument nécessaires, c'est affirmer comme certaine la proposition dont j'ai précisément révoqué en doute la légitimité et dont vous avez entrepris de me montrer la possibilité, car je ne puis pas du tout me faire un concept d'une chose telle qu'il y eût contradiction qu'elle ne fût pas avec tous ses attributs; et cependant, sans la contradiction, je n'ai aucun critérium de l'impossibilité par simples concepts purs *a priori*. »

En deux mots, si vous admettez que le sujet « perfection » existe nécessairement, vous admettez ce qui est en question, objecte Kant.

Nous répondons : s'il s'agit d'une existence objective, vous avez raison ; mais personne n'a jamais fait cette étrange hypothèse, le géomètre Descartes, si rompu aux pratiques de la science, moins que personne. L'existence nécessaire que postulent vos contradicteurs est celle d'une chose qui ne saurait être déterminée *à priori*, ni comme objective, ni comme purement subjective; l'analyse seule, en effet, peut faire connaître l'essence intime de cette chose, qui est au moins une apparence, mais peut-être aussi une réalité. En d'autres termes, la perfection que je conçois, je la conçois nécessairement; mais je n'entends pas dire par là qu'elle soit douée, en dehors du concept que je m'en fais, d'une existence nécessaire. Appliquons, pour le rendre plus sensible et en mieux montrer le vice, le mode d'argumentation de Kant à l'exemple déjà cité. La forme lointaine que j'aperçois à la clarté vague du crépuscule est, en un sens, posée nécessairement, puisque je ne puis pas ne pas l'apercevoir; je m'approche, et de cette apparence encore indécise, je vais faire le point de départ d'une investigation plus sérieuse. Allez-vous m'arrêter et me dire : « Votre démarche est inutile ; vous venez de poser comme nécessaire la réalité de la forme en question. Il faut qu'elle existe. » Je répondrais : « Vous abusez d'une équivoque : je n'ai encore affirmé que l'existence de la forme que je vois ; la question de savoir si elle répond à une réalité objective est réservée, et c'est parce que je doute que je m'approche. »

On voit, par ce qui précède, à quel titre il est permis de poser le sujet « perfection » dans la proposition contestée par Kant. — Reste à savoir si, de ce sujet légitimement posé, on fera jamais sortir l'existence. C'est pour le contester que le grand critique concentre toutes les forces de sa dialectique passionnée :

« Je vous le demande, la proposition, *cette chose-ci ou cette chose-là existe*, est-elle une proposition analytique ou une proposition synthéti-

objective de l'existence ; mais ni Kant ni l'ancienne métaphysique ne nous paraissent avoir usé d'une critique assez sévère au sujet de l'hypothèse qui sert de base à tout l'argu-

que ? Si elle est analytique, vous n'ajoutez rien par l'existence de la chose à votre pensée de la chose ; mais, dans ce cas, ou la pensée qui est en vous devrait être la chose elle-même, ou vous avez supposé une existence comme faisant partie de la possibilité, et alors l'existence est conclue de l'hypothèse de la possibilité interne, ce qui est une tautologie pitoyable..... Avouez-vous au contraire, comme doit le faire volontiers tout homme raisonnable, que toute proposition existentielle est synthétique, mais alors comment prétendez-vous affirmer que le prédicat de l'existence ne peut être enlevé sans contradiction puisque ce privilège n'appartient proprement qu'aux propositions analytiques dont le caractère particulier consiste précisément en cela même ? »

Avant de prendre parti, il importe de rappeler qu'un jugement est analytique, lorsque le prédicat de ce jugement déjà contenu dans la notion du sujet, en est extrait par voie d'analyse ; au contraire, si l'idée désignée par le prédicat s'ajoute au concept du sujet comme une idée nouvelle, le jugement est synthétique. — Ceci posé, à quelle catégorie de jugements se rapporte la proposition existentielle critiquée par Kant ? — En règle générale, une proposition existentielle est synthétique, car nul être, sauf un, ne possède nécessairement l'existence ; ainsi un homme, s'il existe, sera doué de tels attributs spéciaux, mais il n'est nullement nécessaire qu'il existe ; un triangle, s'il est posé, devra toujours enfermer deux angles droits, mais, ainsi que le fait observer Kant lui-même au cours de la discussion, il n'est nullement nécessaire qu'il soit posé. Un seul être, venons-nous de dire, fait exception. S'il existe une cause première (et comment sans contradiction le nier ?), il est de toute nécessité que cette cause existe d'elle-même, et qu'elle trouve dans son essence ou si l'on veut dans sa définition, la raison de la réalité qu'elle possède. Supposons maintenant que notre intelligence soit en relation étroite avec les choses, et que la perfection s'y reflète comme en un miroir, ce qui est l'hypothèse même de l'ancienne métaphysique ; il faudra que dans l'ordre du connaître, l'idée de perfection implique l'idée d'existence, comme la perfection absolue implique l'existence absolue dans l'ordre de l'être ; le parallélisme doit être complet. Si, dans la réalité, la suprême richesse est la suprême raison de l'être, la notion d'une telle richesse doit envelopper pour l'esprit qui la conçoit la notion de l'existence qui y est incluse. Comment donc caractériser la proposition soumise à notre examen ? Sous quel titre logique la ranger ? Est-ce, « ainsi que sera porté à l'admettre tout homme raisonnable », un jugement synthétique ? — Nullement, car le prédicat existence n'ajoute rien à la réalité de la perfection, que l'esprit a implicitement posée en posant la perfection comme sujet ; autrement dit, l'existence en soi et par soi est attachée au type du bien parfait comme les deux droits à l'essence du triangle. — Il faut alors que le jugement soit analytique. — Il l'est, en effet, et Descartes, Malebranche, Leibniz, l'ont si bien cru qu'ils n'ont eu qu'une préoccupation, celle de dégager, par voie d'analyse, dans la proposition qui nous occupe, le prédicat du sujet. Ils ont spéculé de diverses manières sur ce type du bien absolu qu'ils croyaient présent à la raison humaine, cherchant à faire voir qu'il ne pouvait être une apparence

ment. Avons-nous, oui ou non, l'idée positive de l'absolu ou de l'infini intensif? Voilà, à notre sens, toute la question. L'erreur, si elle existe, n'est point une faute de dialectique;

vaine, parce qu'il ne pouvait être une création factice de l'entendement. L'effet, disent-ils, ne peut dépasser la cause, la perfection ne saurait donc être un produit de l'esprit imparfait ; le type que nous concevons doit donc posséder, en dehors de l'esprit, une réalité véritable, une réalité concrète ; il faut que Dieu existe.

« Vous supposez alors une existence comme faisant partie de la possibilité. »

Nous répondrons avec l'ancienne métaphysique : vous avez tort d'opposer la possibilité à l'existence, comme l'abstrait au concret. De ce qu'une chose est possible, il ne s'ensuit pas qu'elle ne soit que possible et qu'il faille la ranger *a priori* parmi les pures idées. Écartons donc de la discussion un terme qui prête trop aisément à l'équivoque. Notre hypothèse, ne l'oublions pas, est celle-ci : « La raison humaine conçoit certainement un type qu'avant tout examen et par habitude, nous pouvons considérer comme indifférent à la réalité idéale ou à la réalité proprement dite, mais au sein duquel une analyse exacte reconnaît ensuite l'existence véritable. » Est-il donc si étrange qu'une chose qui nous semble pouvoir exister existe en effet?

« Mais, dans ce cas, la pensée qui est en vous doit être la chose elle-même ? »

Vous voulez dire : la pensée de la chose elle-même ; lorsque je pense à un homme, il est clair que ma pensée n'est nullement l'homme que je pense. Ainsi amendée, votre formule est d'une justesse absolue et traduit très exactement l'opinion des métaphysiciens que vous combattez. Tous, en effet, ont affirmé que par la pensée nous sommes en communication directe avec l'absolu ; c'est là l'hypothèse qui leur sert de point de départ, hypothèse à la vérité contestable, mais que vous avez admise en acceptant la discussion, et dont vous n'avez par conséquent plus le droit de vous faire une arme contre eux.

En définitive, dans la proposition : « La perfection existe, » le sujet n'est posé que parce nous avons l'idée de la perfection. Quant au prédicat, il est enfermé dans l'objet de cette idée, et le jugement est analytique.

Et, qu'on veuille bien le remarquer, un jugement analytique n'est pas nécessairement une tautologie. L'absolu avec lequel on suppose que l'esprit humain est en relation et qui est la réalité par excellence ne devient tel qu'après examen. C'est ainsi que le triangle, qui avant toute démonstration enferme deux droits, ne possède aux yeux du géomètre cette propriété que lorsque la démonstration est faite. Que dirions-nous d'un critique qui nous adresserait l'objection suivante :

« Quand vous vous proposez de démontrer que le triangle enferme deux droits, de deux choses l'une : ou le sujet « triangle » enferme les deux droits au moment où vous le posez ; ou il ne les enferme pas. Dans le premier cas, vous commettez une pitoyable tautologie ; dans le second, vous lui attribuez contre toute raison une qualité que son essence exclut ? »

Il faudrait évidemment répondre : « Le sujet triangle est posé avant toute démonstration, comme indifférent à tel ou tel attribut et, dans le

elle ne peut venir que d'un fait psychologique incomplètement étudié.

Mais, qu'on admette ou qu'on rejette l'intuition immédiate de Dieu par la raison, il est certain, ne fût-ce qu'à titre de conclusion logique, que le principe suprême doit être parfait. Comment douter en effet que l'être premier résume et concentre en son sein tous les trésors de la vie, lui que, par hypothèse, rien ne limite, ni du dehors, ni du dedans? D'où viendrait l'obstacle à son expansion? Il est aussi impossible de ne pas lui attribuer toute la richesse dont il a la source, qu'il l'est d'imaginer cette richesse sous les traits de la perfection infinie.

Aussi la philosophie et la science ont-elles affirmé de tout temps l'existence transcendante de l'absolu, sans jamais parvenir à donner à cette existence, si différente de la nôtre, un contenu certain. Les plus anciens sages de l'Ionie n'y voulaient voir que des attributs purement physiques, qui l'emprisonnaient encore dans la matière; les géomètres de la Grande-Grèce firent de son essence le principe de la mesure et de l'harmonie, mais les attributs tout intellectuels qu'ils se plaisaient à y enfermer, semblaient y introduire, avec l'abstraction, l'inertie et la mort; cette conception pâlit peu à peu et s'éclipsa devant l'image du bien moral, qui est restée, depuis Socrate, le symbole le moins imparfait de cette parfaite

cas présent, à l'existence de deux droits; il ne les exclut donc ni ne les possède non plus *a priori;* nous sommes aussi éloignés de votre contradiction que de votre tautologie pure. »

En ce qui concerne l'absolu, même mode d'argumentation. Assurément, pourrions-nous dire, l'absolu que nous concevons est un absolu réel, mais nous ne le posons pas comme tel lorsque nous le posons comme sujet; le reproche de tautologie ne saurait donc nous atteindre; mais d'autre part le prédicat n'ajoute point l'existence à la possibilité pure; il ne fait que la constater et la reconnaître là où elle était et où nous ne l'avions pas vue d'abord; la contradiction est donc également évitée, la logique est sauve, et l'argument valable.

Résumons-nous : La valeur de la preuve ontologique dépend uniquement de la proposition suivante :

« L'idée de la perfection est une idée positive de l'entendement. »

Si on l'accepte, il n'est plus possible de nier que la perfection existe, si on la rejette, l'argument manque de base, mais c'est selon nous pour des raisons absolument étrangères à celles que Kant a cru devoir exposer.

nature; mais, qu'on la nomme pensée, amour, liberté, on n'exprime qu'une de ses faces; il faut renoncer à la définir, parce qu'il faut renoncer à l'embrasser.

Si le bon sens populaire croit à l'existence de Dieu, c'est sur la foi d'un double témoignage, celui de l'univers physique et celui du monde moral, et en cela il ne se trompe pas. Le ciel étoilé au-dessus de nos têtes, la loi du bien dans nos cœurs, voilà, pourrions-nous dire, si nous osions détourner à notre profit une formule célèbre, deux preuves que l'humanité ne récuse pas et auxquelles, par surcroît, la raison scientifique donne raison. Qu'on admette ou qu'on rejette l'hypothèse de l'évolution de la nature, peu importe; c'est la nature elle-même, la nature, dans le fait de son existence certaine, qu'il faut expliquer. Il est possible que les êtres se disposent comme d'eux-mêmes en une savante hiérarchie, et que d'échelons en échelons, d'âme en âme, le progrès soit venu jusqu'à l'homme; mais, dans cette série ascendante, on demandera toujours comment s'opère le passage du moins au plus, de l'inférieur au supérieur, et, à l'origine, comment s'est opéré le passage bien autrement solennel du néant à l'être. C'est ce que comprend d'instinct l'homme ignorant, non moins affirmatif que le plus profond des philosophes en ce qui concerne l'existence certaine d'un Être, le premier des êtres, principe et fin de toutes choses.

Mais ce n'est pas assez d'apprendre de la raison que le progrès ne s'explique que par des additions d'être venues d'en haut, et que la nature, livrée à elle-même, retomberait, de degré en degré, dans le néant d'où elle est sortie; comme nous faisons partie de la chaîne des choses, il nous suffit de descendre en nous-mêmes pour voir que ce n'est point à l'impulsion mécanique et nécessitante d'êtres inférieurs, mais bien à l'attrait tout-puissant du Bien, que nous devons de triompher des fatalités qui entravent notre essor et gênent notre développement moral. Qui croit au Bien sans doute ni arrière-pensée, croit aussi à Dieu, car le Bien ne nous appelle à lui qu'en nous transfigurant, et ce miracle intérieur est,

pour quiconque s'observe, un témoignage décisif. Comment se sentir soulevé au-dessus des misères d'une nature défaillante et opprimée, si l'on n'a quelque conscience d'un acte intérieur différent de l'acte humain ? Comment s'apercevoir qu'on se dépasse, qu'on devient autre que soi et meilleur, si l'on ne s'aperçoit en même temps qu'une main amie et souveraine emporte l'âme vers la lumière, et lui communique, comme par l'effet d'une création véritable, des énergies qu'elle n'avait pas ? Et le sentiment se joint à l'idée pour attester l'action divine. Est-il possible d'oublier ce qui se passe quand l'émotion d'un grand devoir accompli, d'un acte de renoncement ou de sacrifice librement consommé, semble nous ravir à nous-mêmes et, nous vaut, dès cette vie mortelle, des instants d'une félicité sans prix ? Qui a connu de telles joies a foi en ce génie invisible qu'écoutait Socrate, et que Kant, bien des siècles après, nommait avec un respect ému l'idéal de la moralité : idéal en effet, mais agissant et efficace, dont le contact échauffe et dont la vertu subjugue. On peut l'affirmer sans crainte : pour inspirer la croyance en Dieu, nul argument ne vaudra jamais cet appel intérieur du bien, ce charme austère et suprême de la perfection, aussi réelle, aussi vivante que les âmes qu'elle sollicite et que les cœurs qu'elle fait battre.

La foi en l'existence d'un être sonverainement juste et bon trouvera contre toutes les attaques d'une science ambitieuse ou mal éclairée un asile inviolable dans le cœur humain ; quoi que l'on fasse, la suprême réalité ne sera jamais en cause ; on ne la voit s'évanouir que lorsqu'on cherche contre toute raison à exprimer son incommunicable essence. Le savant et le philosophe se heurtent plus souvent à l'athéisme que l'homme du peuple, parce que leurs prétentions sont à la fois plus hautes et plus vaines ; ces prétentions, il suffit de les formuler pour les confondre : on veut posséder l'absolu et embrasser l'infini.

CONCLUSION

Nous nous étions proposé l'étude analytique de deux notions étroitement liées, celle d'infini et celle de grandeur ; cette étude achevée, il ne nous reste plus qu'à en dégager quelques vues d'ensemble destinées à résumer les conclusions partielles que nous avons formulées chemin faisant, et à les mettre selon leur importance relative en leur vrai jour.

Et d'abord l'*infini*, étant incompatible avec la réalité, n'a, selon nous, aucune place dans les sciences de la nature, ou plus généralement dans les sciences concrètes, qu'elles se rapportent à la matière ou à l'esprit; il n'a et ne peut avoir accès que dans cet ordre de spéculations où le possible se substitue au réel, l'idée au fait, encore, pour que son emploi y devienne légitime, doit-il se résoudre dans la seule notion intelligible qui lui corresponde, celle de l'indéterminé ou de l'indéfini. L'infini hors de nous, l'infini considéré objectivement est impossible; ce n'est que dans la pensée qu'il existe et d'une existence purement virtuelle, parce qu'il y représente l'excès du pouvoir sur l'acte, de la faculté qui ne s'épuise pas sur les opérations de la faculté qui s'épuisent seules.

Quant à la *grandeur*, voici les propositions qui résument et mettent en lumière ses traits essentiels :

1° Abstraite ou concrète, deux facteurs la constituent : un élément générateur, une loi de génération ; l'un qui lui sert de point de départ, l'autre qui l'étend et la développe.

2° Abstraite ou concrète, l'élément qui l'engendre doit être identique à sa limite, autrement dit, l'origine de son progrès doit être la fin même de sa décroissance, à moins qu'on ne nie le parallélisme nécessaire de l'analyse et de la synthèse, à moins qu'on ne conteste que l'une des deux opérations, devant répéter l'autre en sens inverse, repasse forcément sur tous ses termes ; le point, par exemple, est à la fois premier et dernier, suivant que la ligne est engendrée ou s'épuise.

3° Abstraite ou concrète, la quantité ne peut avoir une limite de même nature qu'elle ; dans cette hypothèse, en effet, la limite serait, comme la quantité, divisible, et par suite ne serait plus la limite. La limite est ce qui est fixe, la quantité ce qui peut croître ou décroître ; d'une part, l'un et le simple, comme le point ; de l'autre, le multiple et le composé, comme la ligne.

4° Mais, on l'a vu, limite et élément générateur, réserve faite du sens de l'opération, sont identiques ; il en résulte que l'élément générateur, au même titre que la limite elle-même, diffère essentiellement de la quantité.

Tels sont les caractères essentiels de la grandeur *en général*. Il faut maintenant déterminer les attributs spécifiques qui distinguent la grandeur *réelle* de la grandeur *abstraite*, la grandeur telle que l'esprit affirme qu'elle doit exister en elle-même, de la grandeur telle qu'il se la représente pour la soumettre aux exigences toutes subjectives du calcul.

Une différence caractéristique sépare à jamais ces deux formes de la quantité et nous interdit de les confondre, c'est celle qui résulte de leur mode de diminution ou d'accroissement. Dans l'une et dans l'autre, il faut bien que l'unité génératrice demeure la même, autrement la quantité idéale ne serait plus le décalque de la quantité en soi ; mais, dans la quantité en soi, la loi de formation est définie et certaine, en d'autres termes, l'unité primordiale se répète suivant une formule précise et déterminée à l'avance, tandis que dans la grandeur mathématique toute formation est ignorée quant aux stades élémentaires de sa décroissance ou de

son progrès ; pour combler cette lacune, il faut dès lors recourir, ainsi qu'on l'a compris de tout temps, à l'intervention de l'infini ; l'infini, au sens traditionnel et en même temps le plus exact du terme, τὸ ἄπειρον, est donc, avant de devenir un instrument et une convention utile dans le calcul, le symbole, que dis-je ? l'aveu formel de notre ignorance en ce qui concerne les composés naturels.

Que la quantité *en soi* se compose d'éléments en nombre fini, c'est ce qui paraît indéniable, puisqu'elle s'épuise ; ce fait n'aurait d'explication ni si les éléments qui la constituent étaient en nombre infini, ni, ce qui revient au même, si de tels éléments n'existaient pas, car, à défaut d'éléments ultimes, il faudrait qu'il existât dans le composé un nombre réellement infini de parties toujours divisibles, et, en vertu même de l'hypothèse, un tel composé serait également inépuisable.

Que, d'autre part, dans la quantité *idéale ou mathématique*, l'infini n'ait qu'une existence provisoire et purement fictive, c'est ce qui résulte de l'idée même de limite, idée qui, en restreignant sa définition, lui donne son vrai sens dans la science. On ne saurait assez redire qu'une grandeur ne peut d'aucune façon tendre vers sa limite ni s'en approcher si peu que ce soit, dès qu'entre elle et sa limite s'interpose un infini véritable ; l'infini mathématique n'est qu'un pseudo-infini, l'infini du devenir, qui se prolonge, il est vrai, sans terme dans la pensée, mais qui a commencement et fin dans les choses.

Ces principes posés, la mathématique est affranchie, à ce qu'il semble, de toute contradiction interne et externe ; elle est d'accord avec elle-même, d'accord avec les autres sciences, et séduite par cette harmonie, la raison se reconnaît dans le système des connaissances humaines comme elle se reconnaît dans le système des choses, à la marque de l'unité.

En effet, dès qu'on accorde que l'élément est d'une nature différente de celle du tout et que dans le tout le nombre des éléments échappe fatalement à la pensée, il est impossible de rien rencontrer qui choque la raison ou qui détonne, dans cet ensemble admirable et merveilleusement lié qui mérite à

si juste titre le nom de science par excellence ou de science exacte. Il suffit de se mettre au point ; on comprend alors ce qu'avaient admis d'instinct les premiers géomètres, sans s'écarter jamais de la donnée fondamentale de leur science ; on voit comment l'infini et la borne se concilient, que dis-je ? comment ils s'appellent et se complètent ; le progrès et la décroissance de la grandeur idéale prennent un sens ; l'incommensurabilité, qui semble de droit en mathématiques, cesse d'être un mystère pour devenir la conséquence rigoureuse d'une hypothèse rationnelle ; le succès du calcul infinitésimal, succès étrange si l'on songe à la variété des théories, s'explique à son tour et sans peine : que l'on conçoive la quantité abstraite comme formée d'un nombre indéfini d'éléments, ou qu'on se la représente comme enfermant des réductions indéfiniment petites d'elle-même en nombre soit indéfini soit même fini, qu'on adopte le point de vue de Cavalieri, celui de Leibniz ou de Laplace, peu importe, le calcul doit réussir, parce qu'en tout état de cause le calculateur demeure fidèle à l'idée mère, à l'idée maîtresse de la science mathématique, celle de l'indétermination du contenu.

Si l'on reste attaché à cette donnée primitive, on s'aperçoit, d'autre part, que les sciences physiques ne contredisent qu'en apparence les affirmations de la science abstraite ; le physicien ne nie point que le progrès de la grandeur passe un entendement comme le nôtre, entendement borné et extérieur aux choses ; il peut donc en un sens strictement subjectif accepter comme légitime le concept de l'infini mathématique ; mais il a le droit d'ajouter pour son propre compte et en s'inspirant de la réalité qu'il observe, que l'indétermination n'est point dans la nature comme dans la pensée, que tout dans l'univers est arrêté et défini, que dans chaque grandeur enfin les parties élémentaires ont un nombre. Certes, il ne prétend pas plus que nous que de tels nombres puissent jamais tomber sous nos prises, mais il est tenu de croire qu'ils existent, sous peine de ne plus rien expliquer d'une manière satisfaisante dans le monde des phénomènes ; c'est que la nature

parle et se tait : elle parle pour nous dire que la loi de toute formation est certaine, et elle emprunte pour l'attester les mille voix des choses sensibles; puis, quand nous lui demandons quelle est cette loi, elle garde un silence solennel, σεμνῶς σίγᾳ, et ce silence est pour jamais, car le secret de l'absolu ne se communique point. C'est en vue de combler, s'il se peut, cette lacune, de réparer à quelque degré l'irréparable, que les sciences physiques et mathématiques se mettent à l'œuvre et se donnent la main. Le mathématicien demande à la réalité la notion de l'élément générateur; le physicien reçoit des sciences abstraites une méthode artificielle, mais indispensable, pour suppléer à la loi de génération qu'il ignore. L'un et l'autre savent tenir compte des données étrangères à leur science propre et corriger à l'aide d'emprunts ce que leur point de vue spécial aurait d'exclusif : celui-là pose en principe l'indétermination de la grandeur mathématique, mais il l'enferme entre des limites absolues ; celui-ci affirme la détermination de la grandeur réelle, mais il ajoute qu'elle est fatalement indéterminée pour l'esprit. Leurs principes, loin de se contredire, se complètent; leur œuvre est commune, communs aussi les instruments qu'ils emploient.

Ces rapports étroits, ces liens profondément cachés et souvent inaperçus qui unissent les sciences concrètes et les sciences abstraites de la nature, il appartient à la métaphysique et à la métaphysique seule de les distinguer nettement et de les mettre en lumière; seule en effet la science qui passe la mathématique et la physique peut les embrasser l'une et l'autre d'une vue d'ensemble, se rendre un compte exact de leurs relations réciproques, et démêler, dans les notions dont elles se servent ou dans les principes qu'elles invoquent, ce qui est fondé en réalité et ce qui n'est que convention ou artifice. Si la métaphysique, suffisamment informée, est impuissante à mener à bien cette entreprise, il faut, croyons-nous, y renoncer, car, outre que dans l'enceinte de chaque science l'horizon est fatalement circonscrit, l'étude exclusive d'un

ordre spécial de faits ou de vérités nuit à l'interprétation exacte des faits ou des vérités d'ordre différent, à plus forte raison, d'ordre supérieur. Ou la métaphysique a le droit d'exister, et elle le prouvera par ses services, ou la science qui la repousse n'existe plus que de nom; car alors nulle vérité générale, mais des fragments de vérité qui, par leur isolement même, perdent leur sens ; nulle conception élevée vaste et largement compréhensive à laquelle puisse s'attacher l'entendement épris d'unité, mais des formules sans lien, qui, faute des réserves et des tempéraments nécessaires, semblent toutes se heurter et se détruire dans un pêle-mêle voisin du chaos [1].

La métaphysique a une mission dont elle prend de jour en jour une conscience plus nette, et qu'elle accepte, quoi qu'en puissent penser ses adversaires, avec une confiance de plus en plus ferme; sous l'impulsion de cette loi d'unité qui est sa première aspiration, elle ne cherche plus seulement à coordonner les résultats généraux de la science, elle veut en indiquer la valeur relative et montrer que les antinomies en apparence irréductibles auxquelles on arrive nécessairement lorsqu'on rencontre les lois supérieures et les principes ultimes, se résolvent à l'aide d'une distinction qu'elle seule peut faire, celle du *phénomène* et du *noumène*, de l'*idéal* et du *réel*. Si la science parvenait à prendre une conscience totale d'elle-même et à faire une synthèse complète de ses vérités, elle se heurterait finalement à des oppositions absolues, parce que le réel et l'idéal tendent sans cesse à se confondre dans notre pensée, et que cette confusion deviendrait de plus en plus grave dans nos généralisations les plus hautes. La métaphysique au contraire qui se propose l'étude de la réalité véritable et dont l'objet propre est la distinction du relatif et de l'absolu, peut aspirer, sans trop présumer de ses forces, à réconcilier des théories qui ne sem-

1. Voir sur l'objet propre et sur les destinées de la métaphysique le remarquable chapitre qui sert de conclusion au *Matérialisme et à la science*, de M. E. Caro.

blent réfractaires à l'unité que parce qu'elles résultent d'une dualité primitive, celle de la chose en soi et de l'apparence, de l'intelligible pur et du sensible.

L'objet que dans le présent travail nous nous étions directement et immédiatement proposé était, on l'a vu, l'étude d'une de ces antinomies qui ne nous paraissent redoutables et que nous ne jugeons insolubles que lorsque nous oublions qu'elles sont dues au conflit de l'imagination et de la raison, au contraste de ce qui paraît être et de ce qui est; il nous semblait de quelque utilité de faire voir que le concept de l'infini, ramené à ses éléments par l'analyse, n'enveloppe aucune des contradictions qu'on lui prête, et que sur ce terrain l'opposition de l'actuel et du virtuel suffit à expliquer, à justifier même les vues les plus divergentes; mais, à vrai dire, nous visions un but ultérieur et bien autrement digne d'intérêt ; nous voulions montrer, en nous aidant d'un exemple, et faire ainsi toucher du doigt le rôle et la portée de la raison pure dans toutes les questions de l'ordre de celle que nous avons traitée; nous voulions surtout établir, ne fût-ce que médiatement et à titre de conclusion dernière, que la métaphysique a un objet propre, puisque des problèmes d'un ordre spécial lui sont soumis ; une méthode, puisqu'elle peut dans l'étude de quelques-uns de ces problèmes employer, non sans succès, certains procédés; un instrument enfin, savoir la raison elle-même, cette raison dégagée du sensible, qui suscita tant d'injustes défiances, et qui nous paraît encore, malgré tout, l'instrument par excellence de la pensée.

Dans la *Critique*, Kant oppose au légitime usage de la raison deux objections capitales : en principe, dit-il, il faut qu'elle altère la réalité qu'elle s'assimile ; en fait, elle se contredit elle-même et se blesse ainsi de ses propres mains.

Nous savons ce qu'il faut penser des prétendues antinomies : la raison y trouve non un écueil, mais un moyen de justification éclatante ; d'autre part, lorsqu'on l'accuse de modifier les objets extérieurs, on lui attribue à tort un acte qui est l'acte propre de la représentation sensible ou perception. La

perception a, semble-t-il, pour objet spécial de recréer le monde à notre image et de l'offrir à nos regards, non tel qu'il est en lui-même, mais tel qu'il doit nous apparaître dans l'intérêt d'exigences pressantes et de besoins essentiels. Dès que nous avons pu subvenir aux premières nécessités de la vie, dès que notre existence se trouve assurée contre les obstacles qui l'entourent et les dangers qui la menacent, la faculté théorique, la raison pure se dégage peu à peu des obscures profondeurs de l'âme, et chez l'homme de loisir, chez le savant, chez le philosophe, elle apparaît bientôt au premier plan ; c'est elle qui affranchit peu à peu la science du préjugé sensible, c'est elle qui dans tout esprit cultivé et réfléchi juge ou doit juger en dernier ressort ; sa fonction propre est précisément d'écarter le phénomène qui n'a qu'une utilité pratique, de corriger au profit de la science pure l'erreur nécessaire de la perception, et de redresser dans l'absolu l'image toute relative que le sens nous offre. Il se passe alors au plus profond de l'entendement quelque chose d'analogue à ce qui se passe dans la vision lorsque nous ramenons à sa position naturelle l'image renversée de la rétine ; mais ce qui est inconscient dans la vision est conscient dans l'acte de la raison pure ; son procédé peut donc être saisi et étudié sur le vif : il consiste, nous le savons, à éliminer de l'apparence totale ces exigences subjectives qu'une réflexion persévérante nous a peu à peu appris à connaître, pour obtenir sur la chose en soi des conclusions en petit nombre, mais certaines. Nous n'hésitons point à l'affirmer ; malgré les objections de la critique, la raison pure est et restera l'instrument de la métaphysique avec une méthode spéciale, conforme au but à atteindre, et nettement défini.

Parce que cette méthode n'a pas pris d'elle-même une conscience distincte et complète, il ne faut pas s'imaginer qu'elle ait rien d'illusoire ou de chimérique ; avant de se reconnaître elle a fait ses preuves ; pratiquée d'instinct depuis que la philosophie existe, elle y a suscité les hypothèses les plus fécondes et ouvert aux sciences même des horizons nouveaux.

Sans parler des hautes spéculations de la pensée grecque et de ces aperçus profonds d'Aristote, de Platon lui-même, sur la différence de ce qui se voit et de ce qui est, pourquoi, dans l'âge moderne, Leibniz a-t il été amené à supposer que la substance pourrait bien n'être en elle-même que la Force, sinon parce que, l'énergie propre du noumène personnel une fois retranchée du phénomène complexe de la résistance, il ne reste et ne peut plus rester hors de nous que la somme de ces énergies rivales sans lesquelles la résistance ne se conçoit plus? Pourquoi le même philosophe a-t-il soutenu avec tant d'autorité et de vraisemblance que l'étendue hors de nous n'est que multiplicité, et que le composé matériel, bien que continu en apparence, doit finalement se résoudre en monades distinctes? Sans doute parce que l'étendue phénoménale n'est qu'un système de rapports et que pour constituer ce système il faut et il suffit qu'il existe, ici une multiplicité quelconque d'éléments, là un centre d'unité, capable de les embrasser d'un seul regard, d'en faire la synthèse, et d'y démêler des relations. C'est en usant du même procédé que Descartes, avant Leibniz, avait pu pressentir que nos sensations ne sont que de simples mouvements dans la matière qui les conditionne; et en effet, puisque nos sensations sont diverses, comment concevoir dans l'étendue une diversité correspondante, si l'on ne fait appel à des changements de rapports, c'est-à-dire à des mouvements qui, bien qu'invisibles, viennent modifier nos organes et ébranler nos nerfs? Retranchez de la sensation l'unité qui en est la forme, et les variations, nécessairement intensives dans le sujet, ne peuvent s'expliquer hors de lui que par des vibrations organiques plus ou moins amples, plus ou moins rapides ou complexes. L'histoire des sciences en fait foi; ces admirables anticipations de la pensée philosophique ont éclairé et dirigé de tout temps les démarches de l'expérience, et elles résultent elles-mêmes de la méthode que nous avons essayé de décrire et de justifier, méthode dont l'instrument est la raison pure, et l'objet, la chose en soi.

Qu'une pareille méthode soit d'un emploi d'autant plus facile que la culture intellectuelle est plus parfaite, c'est ce qu'il est presque superflu d'expliquer. Plus la réflexion philosophique devient intense, plus le regard que nous jetons sur nous-mêmes devient pénétrant et profond, plus aussi l'esprit est apte à se reconnaître, à démêler ses traits essentiels, à revendiquer enfin sa part d'action dans la complexité du phénomène total : c'est alors que par un progrès corrélatif le facteur étranger tend à s'isoler, à s'opposer même au facteur personnel, comme le résidu spontané de cette opération intime. Qu'est-ce donc que le phénomène, sinon un produit? Il est en nous sans être nous, et résulte d'une synthèse dont l'analyse doit pouvoir mettre à nu les éléments constitutifs. L'une de ces deux opérations appelle l'autre et la rend possible; seulement la première est obscure, fatale, si rapide qu'elle nous échappe; la seconde, libre et réfléchie, si réfléchie qu'après de longs siècles de travaux et d'efforts elle implique peut-être le suprême effort de la pensée humaine se concentrant en elle-même pour recréer objectivement ce qui n'est pas elle. L'une répond à la connaissance vulgaire, l'autre est l'instrument de la science des sciences, le procédé spécial et supérieur de la métaphysique.

Nous confondons peut-être, il est vrai, la réalité et la théorie. Que théoriquement, et en vue de donner de la sensation une explication quelconque, on imagine des mouvements et des forces, rien, nous dit-on, de plus naturel et de plus conforme aux exigences d'une nature intelligente, mais aux yeux d'une philosophie circonspecte, une telle hypothèse est sans portée objective et n'a qu'une valeur purement logique; en d'autres termes, le monde conçu par la raison peut entretenir avec la réalité des relations étroites, il n'en saurait être l'expression exacte, la fidèle et vivante image; s'il nous est utile, c'est comme moyen d'orientation; « une carte de géographie nous rend de très grands services, quoiqu'elle soit loin d'être le pays même que nous visitons en esprit [1]. »

1. Lange, *Hist. du matér.*, t. II, ch. II.

Ainsi le monde de la raison pure ne serait encore que phénoménal sous prétexte qu'il est pensé ! Nous croyons, pour notre part, que la question véritable est de savoir, non s'il est pensé, mais s'il l'est ou ne l'est pas primitivement et spontanément. Pourquoi lorsque nous affirmons son existence cette conscience d'un développement intérieur arrêté et contenu par des exigences et des obstacles venus du dehors ? Si ces obstacles, malgré leur extériorité apparente, viennent du dedans, comment se fait-il que nous ne les connaissions pas comme nôtres, et si en dépit de tout, de notre ignorance même, ils sont vraiment nôtres, comment ne se produisent-ils pas suivant quelque règle ou formule intelligible qui nous permette au moins de pressentir leur véritable origine ? Ce qui vient de l'esprit porte sa marque ; telles ces propositions du géomètre dont le progrès régulier suit le mouvement même de la raison et qui se développent logiquement. Pourquoi faut-il, au contraire, que ce soit le hasard d'une rencontre qui, à un moment imprévu de la durée et en un point arbitraire de l'espace, décide de nos affirmations sur la réalité objective ? et comment explique-t-on que l'intelligence soit toujours comme sous le coup d'une surprise, lorsque l'événement qu'elle tire de son propre sein lui semble, on ne sait pourquoi, extérieur ? Ce qui est essentiel ne peut, quoi qu'on allègue, paraître fortuit, ni ce qui résulte d'un progrès interne, accidentel et discontinu. On suppose gratuitement d'ailleurs que ce qui est pensé est par là même phénoménal ; il n'y a à proprement parler de phénoménal que ce qui enveloppe sujet et objet ; or le monde de la raison pure apparaît comme dégagé de toute exigence subjective ; si l'on ne peut nier en un sens qu'il soit pensé, c'est seulement comme condition de la pensée sensible et intuitive ; encore est-il moins pensé au sens vrai du terme qu'induit ou conclu ; nous n'en avons qu'une notion négative, quelque certaine qu'elle soit, parce que nous n'en savons qu'une chose, c'est que sans lui ce qu'on nomme d'ordinaire pensée serait impossible.

La méthode que nous proposons sera rejetée *à priori* par l'idéalisme pur; mais l'idéalisme pur est loin d'avoir conquis la pensée humaine; créé en vue d'écarter les problèmes redoutables que pose le dualisme irréductible du sujet et de l'objet, jusqu'ici il n'a eu raison, semble-t-il, que de cet « intuitionisme » excessif qui veut que nous ayons une vue directe et immédiate des choses, et que par suite les choses soient analogues à la pensée; mais son point de départ n'est ni plus ni moins certain que celui du réalisme, car, s'il affirme que les principes rationnels sont sans valeur objective, il le fait sans raison, et, s'il doute seulement, sa doctrine n'est qu'une hypothèse : or, hypothèse pour hypothèse, celle-là semble de préférence acceptable qui explique le plus simplement et le mieux ce qu'elle est chargée d'expliquer. A l'origine et dès qu'on a pris pied sur le terrain de la sensation, il faut partir d'une supposition, rien n'est moins douteux; pourquoi ne pas adopter la plus rationnelle? Le juge qui doit décider un jour de la valeur relative de l'idéalisme et du réalisme sera sans doute l'accord interne, la liaison harmonieuse et profonde des idées dans chaque système; or nous doutons qu'un tel juge soit, dès aujourd'hui du moins, acquis à l'idéalisme. Parti de la distinction du phénomène et du noumène, comment en est-il venu à n'affirmer que le phénomène? Qu'est-ce d'ailleurs que l'esprit dans une semblable hypothèse? Une série continue d'actes ou d'événements? Mais alors on ne s'explique plus cette synthèse sous des lois définies, qui n'est autre chose que la pensée. Veut-on, pour rendre compte de l'unité mentale, que les phénomènes se groupent d'eux-mêmes en catégories et s'associent en couples qui seront les lois? Nous retrouvons alors le réalisme que nous voulions éviter, mais sous une forme compromettante et inacceptable, puisque les phénomènes deviennent des forces et que les manières d'être, érigées en êtres véritables, sont douées, contre toute vraisemblance, d'affinités électives. Si l'on rejette ces conséquences, nous cherchons en vain la raison concrète, le principe créateur des catégories, et si l'on a recours à un moyen terme, si l'on

soutient que le phénomène n'est à proprement parler ni une abstraction ni une réalité agissante, nous demandons qu'on le définisse. Est-il capable de mémoire? est-il susceptible d'habitude? Peut-il servir de fondement à la liberté? Faut-il dire qu'il est, en même temps que l'idée, le trait d'union des idées, en même temps que la chose enchaînée, le lien qui enchaîne? Non seulement, dans un tel système, tout est dispersé, émietté, mais encore l'obscurité est partout, au début plus que nulle part. Pour supprimer le mystère des choses, on supprime l'être véritable, et il arrive que le mystère subsiste encore et plus profond.

Le but de la métaphysique n'est pas de détruire, mais d'expliquer. Pour lui donner une base solide, la raison pure ne postule qu'une chose, c'est de n'avoir point à représenter à l'imagination ses solutions les plus hautes; exigence bien naturelle, puisque toute représentation est relative. Cette concession obtenue, la faculté que depuis des siècles, tant d'illustres esprits se sont plu à célébrer comme la faculté maîtresse, fera, nous n'en doutons pas, en répandant une lumière toujours plus vive sur des problèmes analogues à ceux que l'idée de l'infini a suscités, sa propre et définitive apologie.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE.

PROLÉGOMÈNES.

DEUXIÈME PARTIE.

L'INFINI DANS LA NATURE.

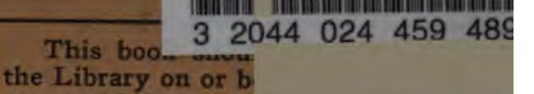
TROISIÈME PARTIE.

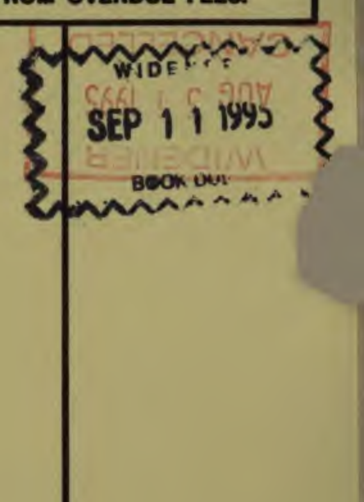
L'INFINI MATHÉMATIQUE.

QUATRIÈME PARTIE.

L'INFINI EN PHILOSOPHIE.

COULOMMIERS. — TYPOG. PAUL BRODARD.


3 2044 024 459 489


SEP 1 1 1995
BOOK DUE

